線形代数学 II 演習問題 (2013 年 12 月 25 日)

1. 演習問題

問題 1. 行列 $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{C})$ およびベクトル $w = (w_i) \in \mathbb{C}^n$ に対して, 次のように定める:

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij}), \qquad \bar{w} = (\bar{w}_i).$$

このとき, 以下を示せ.

(a) $\overline{Aw} = \bar{A}\bar{w}$.

(b) $w = (w_j) \in \mathbb{C}^n$ に対して, $w_j = x_j + iy_j$, $(x_j, y_j \in \mathbb{R})$ と表示して $x, y \in \mathbb{R}^n$ を $x = (x_j)$ および $y = (y_j)$ によって定める. このとき, 以下が成り立つ:

$$x = \frac{1}{2}(w + \bar{w}), \qquad y = \frac{1}{2i}(w - \bar{w}), \qquad w = x + iy.$$

(c) $A \in M(n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow A = \bar{A}$.

(d) $w \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow w = \bar{w}$.

(e) $A \in M(n, \mathbb{C})$ の各成分が実数 (つまり $A \in M(n, \mathbb{R})$) で, ある実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値であったとする. A の固有値 λ の固有ベクトル $w \in \mathbb{C}^n$ から, (b) のように $x, y \in \mathbb{R}^n$ を定める. このとき, $Ax = \lambda x$ および $Ay = \lambda y$ が成り立つ.

(f) $A \in M(n, \mathbb{C})$ の各成分が実数 (つまり $A \in M(n, \mathbb{R})$) で, ある実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ が A の固有値であったとする. このとき, A の固有値 λ の固有ベクトルとして, その成分が全て実数であるものが存在する.

問題 2. 以下の行列 A を対角化する行列 P, および対角化した行列 $P^{-1}AP$ を与えよ.

[1] $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ [2] $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

[3] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ [4] $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

[5] $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ [6] $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[7] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [8] $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

[9] $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ [10] $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

以上.

2. 解答

2.1. 問題 1. (証明の概略)

(a), (b), (c), (d) は直接計算で示すことができる. 例えば (a) の場合:

$$\overline{Aw \text{ の第 } k \text{ 成分}} = \overline{\sum_j a_{kj} w_j} = \sum_j \bar{a}_{kj} \bar{w}_j = \bar{A}\bar{w} \text{ の第 } k \text{ 成分}.$$

(e) 仮定より, $A = \bar{A}$, $\lambda = \bar{\lambda}$ および $Aw = \lambda w$ が成り立つ. これらより, $A\bar{w} = \lambda\bar{w}$ を得る. すると,

$$Ax = A(\frac{1}{2}(w+\bar{w})) = \lambda\frac{1}{2}(w+\bar{w}) = \lambda x$$

となる. $Ay = \lambda y$ も同様にして証明できる.

(f) A の固有値 λ の固有ベクトルを $w \in \mathbb{C}^n$ とする. (e) より, w から作った $x, y \in \mathbb{R}^n$ は $Ax = \lambda x$, $Ay = \lambda y$ を満たす. w は固有ベクトルだったから, $w \neq 0$ である. 従って, x と y が同時に 0 になることはない. すなわち, x または y のどちらかは 0 ではない. 0 でない方のベクトルは A の固有値 λ の固有ベクトルであり, その成分は全て実数である.

2.2. 問題 2. 以下は解答の例である.

[1] $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

[2] $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, $\quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

[3] $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

[4] $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[5] $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[6] $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

[7] $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

[8] $P = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 1+i \\ 0 & 2i & -2i \\ -1 & 2+2i & 2-2i \end{pmatrix}$, $\quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

[9] $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

[10] $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.