線形代数学続論 演習問題

1. 演習問題

問題 1. 以下の行列 A のジョルダン標準形 $P^{-1}AP$ とそれを与える可逆行列 P を求めよ.

[1] $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ [2] $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

[3] $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [4] $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

[5] $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ [6] $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

問題 2. 以下の行列 A のジョルダン標準形 $P^{-1}AP$ とそれを与える可逆行列 P を求めよ.

[1] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ [2] $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[3] $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ [4] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[5] $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ [6] $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[7] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ [8] $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[9] $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ [10] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問題 3. 以下の行列 A のジョルダン標準形 $P^{-1}AP$ とそれを与える可逆行列 P を求めよ.

[1] $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ [2] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[3] $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [4] $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

[5] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ [6] $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[7] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [8] $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

[9] $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ [10] $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 4. 以下の行列 A のジョルダン標準形 $P^{-1}AP$ とそれを与える可逆行列 P を求めよ.

[1] $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ [2] $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[3] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ [4] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[5] $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [6] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

[7] $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ [8] $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

[9] $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ [10] $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問題 5. 以下の行列 A のジョルダン標準形 $P^{-1}AP$ とそれを与える可逆行列 P を求めよ.

[1] $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [2] $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 6. 以下の行列 A のジョルダン標準形 $P^{-1}AP$ とそれを与える可逆行列 P を求めよ.

[1] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ [2] $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. 解答例

2.1. **問題 1.**

[1] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z^2$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[2] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z^2$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[3] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z-1)^2$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z-1)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[4] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z^2$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

[5] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z-1)^2$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z-1)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

[6] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z-2)^2$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z-2)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.2. **問題 2.**

[1] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[2] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[3] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[4] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

[5] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[6] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z^3$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[7] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z^3$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[8] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z^3$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[9] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z^3$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[10] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z^3$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3. **問題 3.**

[1] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z-2)^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z-2)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[2] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z-1)^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z-1)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[3] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z-1)^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z-1)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[4] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z-1)^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z-1)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[5] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z-2)^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z-2)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[6] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z-1)^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z-1)^3$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[7] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z-1)^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z-1)^3$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[8] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z+1)^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z+1)^3$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[9] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z-1)^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z-1)^3$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

[10] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z^3$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z^3$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 2 \\ 18 & 12 & -1 \\ 18 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.4. **問題 4.**

[1] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z-1)(z-2)^2$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z-1)(z-2)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[2] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z(z-1)^2$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z(z-1)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

[3] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z(z-1)^2$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z(z-1)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[4] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z^2(z-1)$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z^2(z-1)$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

[5] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z+1)(z-1)^2$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z+1)(z-1)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[6] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z-1)(z+1)^2$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z-1)(z+1)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

[7] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z-1)(z-2)^2$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z-1)(z-2)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[8] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z^2(z-3)$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z^2(z-3)$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

[9] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z(z-1)^2$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z(z-1)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

[10] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z-1)(z+2)^2$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z-1)(z+2)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.5. **問題 5.**

[1] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z(z-1)^2$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z(z-1)$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[2] 固有多項式 $\Phi_A(z) = z^2(z-1)$, 最小多項式 $\phi_A(z) = z(z-1)$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6. **問題 6.**

[1] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z-1)^2(z+2)^2$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z-1)(z+1)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

[2] 固有多項式 $\Phi_A(z) = (z-1)^2(z-2)^2$, 最小多項式 $\phi_A(z) = (z-1)^2(z-2)^2$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$