線形代数学 I 演習問題 (2014 年 4 月 28 日)

問題 1. 以下の主張を証明せよ. (以下では, n は自然数である.)

(a) 上三角行列 $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ の積 AB は上三角行列である.
(b) ユニタリー行列 $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ の積 AB はユニタリー行列である.
(c) 歪 Hermite 行列 $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ に対し, $AB - BA$ も歪 Hermite 行列である.
(d) 行列 $A \in M(n, \mathbb{C})$ が Hermite かつ歪 Hermite ならば $A = 0$ である.
(e) 任意の行列 $A \in M(n, \mathbb{C})$ に対し, ある Hermite 行列 $H \in M(n, \mathbb{C})$ とある歪 Hermite 行列 $S \in M(n, \mathbb{C})$ であって, $A = H + S$ となるものが存在する.

問題 2. 行列のなす集合 $SU(2)$ を以下のように定める:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C}) \,\middle|\, |u|^2 + |v|^2 = 1 \right\}.$$

このとき, 以下の主張を証明せよ.

(a) 任意の $A, B \in SU(2)$ に対し, $AB \in SU(2)$ である.
(b) 任意の $A \in SU(2)$ に対して $AB = BA$ を満たすような行列 $B \in M(2, \mathbb{C})$ は, ある複素数 $z \in \mathbb{C}$ を用いて $B = zE$ と表せる.
(c) $A \in SU(2)$ に対して, $\phi(A) \in M(3, \mathbb{C})$ を次のように定める:

$$\phi(A) = \begin{pmatrix} u^2 & -\sqrt{2}u\bar{v} & \bar{v}^2 \\ \sqrt{2}uv & |u|^2 - |v|^2 & -\sqrt{2}\bar{u}\bar{v} \\ v^2 & \sqrt{2}\bar{u}v & \bar{u}^2 \end{pmatrix}.$$

すると, 任意の $A, B \in SU(2)$ に対し $\phi(A)\phi(B) = \phi(AB)$ が成り立つ.

問題 3. 行列 $\epsilon, J \in M(2, \mathbb{C})$ を以下のように定める:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき以下を満たす行列 $I \in M(2, \mathbb{C})$ を全て求めよ.

$$I\epsilon + \epsilon I = IJ + JI = I^2 + E = 0.$$

問題 4. 行列 $I_1, I_2, I_3 \in M(4, \mathbb{C})$ を以下のように定める:

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき以下を満たす行列 $K \in M(4, \mathbb{C})$ を全て求めよ.

$$I_1K + KI_1 = I_2K + KI_2 = I_3K + KI_3 = K^2 + E = 0.$$

問題 5. 以下の正方行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

[1] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[2] $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

[3] $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[4] $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

[5] $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[6] $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[7] $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[8] $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

[9] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[10] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

[11] $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[12] $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[13] $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[14] $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

[15] $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

[16] $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

[17] $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[18] $A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

[19] $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

[20] $A = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 2 \\ 18 & 12 & -1 \\ 18 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

以上.

問題 1. (解答の方針の例または略解)

(a) A と B を成分表示して証明する.

(b) ${}^t(\overline{AB}) = {}^t\overline{B}\,{}^t\overline{A} = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$.

(c) ${}^t(\overline{AB - BA}) = {}^t\overline{B}\,{}^t\overline{A} - {}^t\overline{A}\,{}^t\overline{B} = (-B)(-A) - (-A)(-B) = -(AB - BA)$.

(d) ${}^t\overline{A} = A$ かつ ${}^t\overline{A} = -A$ より $2A = 0$ となり, これより $A = 0$ を得る.

(e) $H = \frac{1}{2}(A + {}^t\overline{A})$, $S = \frac{1}{2}(A - {}^t\overline{A})$ とすれば良い.

問題 2. (解答の方針例) (a) A と B を定義のように成分表示して計算する. (b) B を未知の行列として与えられた条件を方程式として書き下す. A として $u = 0$ や $v = 0$ という特別な行列を選ぶと方程式は簡単に解ける. (c) (a) と同様.

問題 3. $I = \pm i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

問題 4. $K = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

問題 5.

[1] $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[2] $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

[3] $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[4] $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

[5] $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

[6] $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[7] $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[8] $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[9] $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

[10] $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

[11] $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

[12] $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[13] $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

[14] $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

[15] $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

[16] $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

[17] $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & -8 \end{pmatrix}$

[18] $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 25 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -10 \end{pmatrix}$

[19] $A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ -6 & -3 & 3 \\ 9 & -9 & 9 \end{pmatrix}$

[20] $A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$