線形代数学 I 演習問題 (2014 年 6 月 9 日)

問題 1. 3 次対称群 S_3 の各要素を互換の積で表せ. (それぞれ 1 つの表示でよい)
問題 2. 4 次対称群 S_4 の各要素を互換の積で表せ. (それぞれ 1 つの表示でよい)
問題 3. n を 2 以上の自然数とするとき, n 次対称群 S_n の偶置換の個数と奇置換の個数が等しいことを証明せよ.
問題 4. 対称群 S_n の置換は, 幾つかの互換の積として表すことができる. S_n の全ての要素を互換の積として表すためには最低で何種類の互換が必要かを $n = 2, 3, 4$ それぞれの場合に答えよ.
問題 5. 置換を次の方法で幾つかの種類に分類する: 「$\sigma, \sigma' \in S_n$ が同じ種類であるとは, ある置換 $\tau \in S_n$ を使って $\sigma' = \tau\sigma\tau$ と表せることである.」この方法で S_n の置換を同じ種類に分けて分類したときいくつの種類があるかを $n = 2, 3, 4$ それぞれの場合に答えよ.

以上.

解答

問題 1. S_3 の $3! = 6$ 個の置換を互換の積で表すと例えば次のようになる.

$$1 = 1, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (12)(23), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (23)(12).$$

問題 2. S_4 の $4! = 24$ 個の置換を互換の積で表すと例えば次のようになる.

$$1 = 1, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (12),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (13), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (14),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (23), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (24),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (34), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (12)(23),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (23)(12), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (12)(24),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (24)(12), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (13)(34),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (34)(13), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (23)(34),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (34)(12), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(34),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (14)(12)(23), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (34)(12)(23),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (24)(23)(12), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (13)(24),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (14)(23)(12), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (34)(23)(12),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (24)(12)(23), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (14)(23).$$

問題 3. (解答例) S_n の奇置換のなす部分集合を S'_n, 偶置換のなす部分集合を S''_n と書くことにする. 置換は必ず奇置換か偶置換のいずれかであるので, $S_n = S'_n \cup S''_n$ と $S'_n \cap S''_n = \emptyset$ が成り立つ. ここである奇置換 $\tau \in S_n$ を選ぶ. σ が奇置換ならば $\tau\sigma$ は偶置換であり, 逆に σ が偶置換ならば $\tau\sigma$ は奇置換である. この対応 $\sigma \leftrightarrow \tau\sigma$ により集合 S'_n と S''_n には一対一の対応がつけられるので, S'_n と S''_n の要素の個数は同じである. これは S_n の奇置換と偶置換の個数が等しいことを意味する.

問題 4. $n = 2$ のとき 1 種類, $n = 3$ のとき 2 種類, $n = 4$ のとき 3 種類必要である.

問題 5. $n = 2$ のとき 2 種類, $n = 3$ のとき 3 種類, $n = 4$ のとき 5 種類ある.