線形代数学 I 演習問題 (2014 年 6 月 30 日)

問題 1. n を自然数とする.

(a) 行列 $T \in M(n, \mathbb{R})$ が ${}^tTT = T{}^tT = E$ を満たすとき, その行列式 $|T|$ は 1 または -1 であることを示せ.

(b) 成分がすべて整数である n 行 n 列の行列 A が逆行列 A^{-1} を持ち, さらに A^{-1} の全ての成分が整数であったとする. このとき, 行列式 $|A|$ は 1 または -1 であることを示せ.

問題 2. n を 2 以上の自然数とする. n 行 n 列の行列 $A = (a_{ij})$ の (i, j) 成分 a_{ij} を以下のように定めるとき, その行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(a) $a_{ij} = \begin{cases} 1, & (j = \tau(i)) \\ 0. & (j \neq \tau(i)) \end{cases}$ ただし $\tau \in S_n$ は与えられた置換である.

(b) $a_{ij} = n(i-1) + j$.

(c) $a_{ij} = \begin{cases} 2, & (i = j) \\ -1, & (|i-j| = 1) \\ 0. & (|i-j| > 1) \end{cases}$

問題 3. (Vandermonde 行列式) n を 2 以上の自然数とする. 複素数 $x_1, \ldots, x_n$ に対して, $a_{ij} = {x_i}^{j-1}$ とおいて, n 行 n 列の行列 A_n を $A_n = (a_{ij})$ によって定める. この行列の行列式 $|A_n|$ が以下のように表せることを示せ.

$$|A_n| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

問題 4. n を 3 以上の自然数とする.

(a) q を 2 以上 $n-1$ 以下の自然数とする. さらに q と n は, 1 以外に共通の因数を持たないとする. 自然数 $k = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して, qk を n で割った余りがなす集合を R_q とするとき, $R_q = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ となることを示せ.

(b) 複素数 ζ を $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ によって定める. $q = 1, \ldots, n-1$ に対して, 以下が成り立つことを示せ:

$$\sum_{k=1}^{n} \zeta^{qk} = 0.$$

(c) n 行 n 列の行列 $A = (a_{ij})$ の (i, j) 成分 a_{ij} を $a_{ij} = \zeta^{ij}$ で定めるとき, AA^* を求めよ.

(d) A の行列式 $\det A$ の絶対値 $|\det A|$ を求めよ.

(e) 以下で定める複素数 d の絶対値 $|d|$ を求めよ.

$$d = \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta^k - 1)^{n-k}.$$

以上.

問題 1. (解答例)

(a) $|{}^tTT| = |{}^tT||T| = |T||T| = |T|^2$ および $|E| = 1$ より, 実数 $|T|$ は $|T|^2 = 1$ を満たす. 二乗して 1 になる実数は ± 1 だけである.

(b) A の成分が全て整数であることから, $|A|$ は整数である. 同様に $|A^{-1}|$ も整数である. $AA^{-1} = E$ より, $|A||A^{-1}| = 1$ が成り立つ. A が逆行列を持つので $|A| \neq 0$ である. よって $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ となるので, $\frac{1}{|A|}$ は整数である. これは, $|A|$ が整数であるという条件のもとでは, $|A| = \pm 1$ のときしかありえない.

問題 2. (a) $|A| = \mathrm{sgn}(\tau)$. (b) $|A| = \begin{cases} -2, & (n = 2) \\ 0. & (n > 2) \end{cases}$ (c) $|A| = n + 1$.

(a) 置換を使った行列式の定義に戻って直接計算する.

(b) $n > 2$ のとき, A の第 n 行から第 $n-1$ 行を引き, 第 $n-1$ 行から第 $n-2$ 行を引くと, 結果として得られる行列は第 n 行と第 $n-1$ 行が一致している. この操作で行列式の値は変わらず, 同じ行を含む行列の行列式は 0 なので, $|A| = 0$ となる.

(c) n に対して与えられた行列を A_n と書くことにする. $|A_n|$ を第 1 行について (二度) 展開すると, $|A_n| = 2|A_{n-1}| - |A_{n-2}|$ という漸化式が得られる. $|A_2| = 3$ と $|A_3| = 4$ は直接計算でわかるので, 帰納法を使うことで $|A_n| = n + 1$ を得る.

問題 3. (解答例) 1 行目を他の行から引くという行基本変形により次を得る:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^{n-2} - x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 & \cdots & x_3^{n-2} - x_1^{n-2} & x_3^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{n-1} - x_1 & x_{n-1}^2 - x_1^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} - x_1^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} - x_1^{n-1} \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^{n-2} - x_1^{n-2} & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

右辺で考えている行列において, 第 n 列から第 $n-1$ 列の x_1 倍を引き, 第 $n-1$ 列から第 $n-2$ 列の x_1 倍を引き, $\cdots$, 第 3 列から第 2 列の x_1 倍を引くことで, 最終的に次を得る:

$$\begin{aligned} |A_n| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2 & \cdots & (x_2 - x_1)x_2^{n-3} & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} \\ 0 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)x_3 & \cdots & (x_3 - x_1)x_3^{n-3} & (x_3 - x_1)x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{n-1} - x_1 & (x_{n-1} - x_1)x_{n-1} & \cdots & (x_{n-1} - x_1)x_{n-1}^{n-3} & (x_{n-1} - x_1)x_{n-1}^{n-2} \\ 0 & x_n - x_1 & (x_n - x_1)x_n & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-3} & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \left(\prod_{k=2}^{n} (x_k - x_1) \right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-3} & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-3} & x_3^{n-2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-3} & x_{n-1}^{n-2} \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-3} & x_n^{n-2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

最後の行列式は, A_{n-1} において $x_1, \ldots, x_{n-1}$ をそれぞれ $x_2, \ldots, x_n$ に置き換えたものである. この点に注意して数学的帰納法を用いると,

$$|A_n| = \left(\prod_{i=1}^{n-2} \prod_{j=i+1,\ldots,n} (x_j - x_i) \right) \begin{vmatrix} 1 & x_{n-1} \\ 1 & x_n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

となることがわかる.

問題 4. 以下において, 証明は解答例である.

(a) $\ell = 0, 1, \ldots, n-1$ が与えられたとき, ある $k = 0, 1, \ldots, n-1$ であって qk を n で割った余りが ℓ になるものが存在することを示せばよい. n と q が 1 以外に共通因子を持たない (すなわち互いに素) ということから, $na + qb = 1$ を満たす整数 a, b が存在する. ある整数 c であって, $bl + nc$ が 0 以上 $n-1$ 以下であるようにすることができる. このとき $k = bl + nc$ とおくと, $qk = \ell + n(qc - a\ell)$ となる. $qk \geq 0$, $\ell \geq 0$ なので $qc - a\ell \geq 0$ であり, qk を n で割った余りは ℓ になる.

(b) 自然数 $n \geq 2$ について, 「主張 n」を次のとおりとする:

「主張 n」: $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ とするとき, $q = 1, \ldots, n-1$ に対して $\sum_{k=1}^{n} \zeta^{qk} = 0$ が成り立つ.

この主張を n についての帰納法で証明する. 主張 2(つまり $n = 2$ のとき) は, 直接計算で成り立つことが確かめられる. 帰納法の仮定として, 主張 2, $\cdots$, 主張 $n-1$ までが成り立っていると仮定する. この仮定のもとで主張 n が成り立つことがいえれば, 数学的帰納法より, 証明が完成する. 主張 n が成り立つことは以下のようにして示せる: まず $0 = 1 - \zeta^n = (1-\zeta)(1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^{n-1})$ および $\zeta \neq 1$ より, $\sum_{k=1}^{n} \zeta^k = 0$ である. すなわち主張 n は $q = 1$ に対して正しい. q が 2 以上 $n-1$ 以下のとき, まず q と n が 1 以外に共通の因数を持たない場合を考える. すると (a) の結果から, $\{\zeta^{qk} \mid k = 0, \ldots, n-1\} = \{\zeta^{\ell} \mid \ell = 0, \ldots, n-1\}$ となることがわかる. 従って, $\sum_{k=1}^{n} \zeta^{qk} = \sum_{\ell=1}^{n} \zeta^{\ell} = 0$ となる. 次に q と n が 1 以外に共通の因数を持つ場合を考える. このとき, q と n の最大公約数を g とし, 自然数 p と m を用いて $q = pg$, $n = mg$ と書くことにする. $\xi = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ とおくと,

$$\sum_{k=1}^{n} \zeta^{qk} = \sum_{k=1}^{mg} \xi^{pk} = \sum_{j=0}^{g-1} \sum_{i=1}^{m} \xi^{p(i+mj)} = \sum_{j=0}^{g-1} \sum_{i=1}^{m} \xi^{pi}$$

となる. $1 < m < n$ なので, 帰納法の仮定である主張 m を使うことができ, $\sum_{i=1}^{m} \xi^{pi} = 0$ が成り立つ. これで主張 n が成り立つことが示せた.

(c) AA^* の (i, j) 成分を b_{ij} と書くことにする. 自然数 ℓ に対して $\overline{\zeta}^{\ell} = \zeta^{n-\ell} = \zeta^{-\ell}$ が成り立つことに注意すれば, $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \zeta^{(i-j)k}$ と書ける. $i = j$ のとき, $b_{ii} = n$ である. $i > j$ のとき, $q = i - j$ とおけば, $1 \leq q \leq n-1$ である. よって (b) より, $b_{ij} = 0$ となる. $i < j$ のとき, 適当な自然数 a を用いて, $q = i - j + na$ が $1 \leq q \leq n-1$ を満たすようにできる. $\zeta^{qk} = \zeta^{(i-j)k}$ なので, 再び (b) より $b_{ij} = 0$ である. 以上をまとめれば, AA^* は単位行列 E_n の n 倍である: $AA^* = nE_n$.

(d) $n^n = \det(nE_n) = \det(AA^*) = \det(A)\det(A^*) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det A|^2$. 従って, $|\det A| = n^{n/2}$ である.

(e) $x_i = \zeta^i$ として問題 3 の結果を使うと次を得る:

$$\det A = \zeta^{\frac{n(n+2)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\zeta^j - \zeta^i) = \zeta^{\frac{n(n+2)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \zeta^i(\zeta^{j-i} - 1)$$

$$= \zeta^{\frac{n(n+2)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-k} \zeta^i(\zeta^k - 1) = \zeta^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}} \prod_{k=1}^{n} (\zeta^k - 1)^{n-k} = \zeta^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}} d.$$

$|\zeta| = 1$ なので, (d) の結果より, $|d| = |\det A| = n^{n/2}$ である.