1 レポート提出についての注意

- 締め切り: 2016 年 1 月 29 日 (金)
- 提出場所: 理学部 A 棟 5 階 519(ドア手前の封筒)
- 様式: A4 レポート用紙 2 枚まで (1 枚毎に名前と学籍番号を書き, 綴じない.)
- 式の導出などにおける細部は省略し, 議論のポイントがわかるような記述をすること.

2 レポート問題

以下, 任意の自然数 m に対し, $\mathbb{R}^m$ には標準的な位相が与えられているとする. また, 全単射 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $((x,y) \mapsto x+iy)$ を用いて, $\mathbb{C}^m$ を $\mathbb{R}^{2m}$ と同相な位相空間とみなす.

(1) 実数係数の n 行 n 列の行列全体の集合 $M(n,\mathbb{R})$ を, $\mathbb{R}^{n^2}$ との全単射を用いて, n^2 次元多様体とする. 可逆 (正則) な行列全体のなす部分空間 $GL(n,\mathbb{R}) \subset M(n,\mathbb{R})$ は, n^2 次元の部分多様体であることを示せ. (ヒント: 行列式が与える写像 $\det : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を考えよ.)

(2) 集合 $S^2 = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 |\ X^2+Y^2+Z^2=1\}$ に, $\mathbb{R}^3$ の部分空間としての位相を与える. S^2 の開集合 U_+ と U_- を以下で定める:

$$U_+ = \{(X,Y,Z) \in S^2 |\ Z > -1\}, \quad U_- = \{(X,Y,Z) \in S^2 |\ Z < 1\}.$$

(a) $(X,Y,Z) \in U_\pm$ と $(0,0,\mp 1) \in \mathbb{R}^3$ を通る $\mathbb{R}^3$ の中の直線が, xy 平面と共有する点を $(\phi_\pm(X,Y,Z),0) \in \mathbb{R}^3$ と書き, 写像 $\phi_\pm : U_+ \to \mathbb{R}^2$ を定める. これらの写像を具体的に書け. (符号は複合同順である.)

(b) 上で定めた $\phi_\pm$ が同相写像であることを示せ.

(c) 座標変換 $\phi_+ \circ \phi_-^{-1} : \phi_-(U_+ \cap U_-) \to \phi_+(U_+ \cap U_-)$ を具体的に書け.

(3) 位数 2 の巡回群 $\mathbb{Z}_2 = \{1,-1\}$ の $\mathbb{C}^2$ への作用を,

$$\begin{aligned} 1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, &\qquad (z_1,z_2) \mapsto (z_1,z_2), \\ -1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, &\qquad (z_1,z_2) \mapsto (z_2,z_1), \end{aligned}$$

によって定める. (すなわち, $\mathbb{C}^2$ の成分の入れ換えで作用させる.) この作用による商空間 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ は $\mathbb{C}^2$ と同相であることを示すことにより, $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ は実 4 次元多様体になることを示せ. (ヒント: 2 次方程式の解の公式および解と係数の関係を使う.)

以上.