トポロジー 演習問題 (2015 年 4 月 8 日)

問題 1. 以下を証明せよ.

(a) 位相空間 X がコンパクトであるとき, X の閉部分空間はコンパクトである.

(b) 位相空間 X から Y への連続写像 $f : X \to Y$ が与えられたとする. X がコンパクトならば, 像 $f(X)$ もコンパクトである.

(c) Hausdorff 位相空間 Y のコンパクトな部分空間 $C \subset Y$ は閉集合である.

(d) コンパクト位相空間 X から Hausdorff 位相空間 Y への連続な全単射 $f : X \to Y$ は同相写像である. (ヒント: 上の (a), (b), (c) を組み合わせる.)

(e) 区間 $[0,1]$ の同値関係 $\sim$ を以下で定める:

$$t \sim t' \Leftrightarrow \begin{cases} t = t', \text{ または,} \\ t = 0 \text{ かつ } t' = 1, \text{ または,} \\ t = 1 \text{ かつ } t' = 0. \end{cases}$$

商空間 $[0,1]/\sim$ に $[0,1]$ からの商位相を入れたものは,

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 = 1\}$$

と同相である. (ヒント: (d) を使う.)

問題 2. X, Y, Z を位相空間とし, $A \subset X$ を部分空間とする. 以下を証明せよ.

(a) 連続写像 $f_i : X \to Y$, $(i = 0,1)$ と $g : Y \to Z$ が与えられたとする. f_0 と f_1 が A を動かさずにホモトピックならば, $g \circ f_0$ と $g \circ f_1$ は A を動かさずにホモトピックである.

(b) 連続写像 $f : X \to Y$ と $g_i : Y \to Z$, $(i = 0,1)$ が与えられとする. g_0 と g_1 が $f(A)$ を動かさずにホモトピックならば, $g_0 \circ f$ と $g_1 \circ f$ は A を動かさずにホモトピックである.

(c) 連続写像 $f_i : X \to Y$ と $g_i : Y \to Z$ が与えられたとする. $(i = 0,1.)$ f_0 と f_1 がホモトピックであり, g_0 と g_1 がホモトピックであるとき, $g_0 \circ f_0$ と $g_1 \circ f_1$ はホモトピックである.

以上.