トポロジー 演習問題 (2015 年 4 月 22 日)

問題 1. 位相空間 X の任意の道 $f : [0,1] \to X$ に対し, $f * c_{f(1)} \sim f$ を示せ. ここで, $c_{f(1)} : [0,1] \to X$ は $c_{f(1)}(s) = f(1)$ と定めた道である.

問題 2. 位相空間 X の任意の道 $f : [0,1] \to X$ に対し, $\bar{f} * f \sim c_{f(1)}$ を示せ. ここで, $\bar{f} : [0,1] \to X$ は $\bar{f}(s) = f(1-s)$ と定めた道である.

問題 3. 位相空間 X の任意の道 f, g に対し, $\overline{f * g} \sim \bar{g} * \bar{f}$ を示せ.

問題 4. $0 = \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 = 1$ とする. 位相空間 X の道 $f : [0,1] \to X$ に対して, 道 f_1 と f_2 を次のように定める.

$$f_1(s) = f((1-s)\sigma_0 + s\sigma_1), \qquad f_2(s) = f((1-s)\sigma_1 + s\sigma_2).$$

このとき, $f_1 * f_2 \sim f$ を示せ.

問題 5. $0 = \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \cdots \leq \sigma_n = 1$ とする. 位相空間 X の道 $f : [0,1] \to X$ に対して, 道 f_i, $(i = 1, \ldots, n)$ を次のように定める.

$$f_i(s) = f((1-s)\sigma_{i-1} + s\sigma_i).$$

このとき, $(\cdots(((f_1 * f_2) * f_3) * f_4) * \cdots) * f_n \sim f$ を示せ.

問題 6. 位相空間 X が, その開集合 $U, V \subset X$ を用いて $X = U \cup V$ と表せるとする. このとき, X の任意の道 f に対して, 以下の性質を持つ有限個の道 $f_1, \ldots, f_n$ が存在することを示せ.

(a) 各 i に対し, f_i は U の道であるか, V の道であるかのいずれかである.

(b) $(\cdots(((f_1 * f_2) * f_3) * f_4) * \cdots) * f_n \sim f$.

(ヒント: 区間 $[0,1]$ の開被覆 $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ についての Lebesgue 数を考えることで, $0 = \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_n = 1$ という実数であって, $f([\sigma_{i-1}, \sigma_i])$ が U または V に含まれるものが存在する.)

以上.

http://math.shinshu-u.ac.jp/~kgomi/class/index.html.

解答例

問題 1. 連続写像 $H:[0,1]\times[0,1]\to X$ を以下で定める:

$$H(s,t)=\begin{cases} f(\frac{2s}{t+1}), & (0\le s\le \frac{t+1}{2}) \\ f(1). & (\frac{t+1}{2}\le s\le 1)\end{cases}$$

この H により, $f*c_{f(1)}\sim f$ が示される.

問題 2. 連続写像 $H:[0,1]\times[0,1]\to X$ を以下で定める:

$$H(s,t)=\begin{cases} f(1-2s(1-t)), & (s,t)\in[0,1/2]\times[0,1] \\ f(2s(1-t)-1). & (s,t)\in[1/2,1]\times[0,1]\end{cases}$$

この H により, $\bar{f}*f\sim c_{f(1)}$ が示される.

問題 3. 定義に従って $\overline{f*g}$ と $\bar{g}*\bar{f}$ を書き下すと,

$$\overline{f*g}(s)=\bar{g}*\bar{f}(s)=\begin{cases} g(1-2s), & (0\le s\le \frac{1}{2}) \\ f(2-2s). & (\frac{1}{2}\le s\le 1)\end{cases}$$

となるので, たしかに $\overline{f*g}\sim\bar{g}*\bar{f}$ である.

問題 4. 道 f_1*f_2 を具体的に表示すると次のようになる.

$$(f_1*f_2)(s)=\begin{cases} f(2s\sigma_1), & (0\le s\le \frac{1}{2}) \\ f(2\sigma_1(1-s)+2s-1). & (\frac{1}{2}\le s\le 1)\end{cases}$$

特に, $\sigma_1=1/2$ のとき, $f_1*f_2=f$ である. これに注目して, 連続写像 $H:[0,1]\times[0,1]\to X$ を以下のように定める:

$$H(s,t)=\begin{cases} f(2s((1-t)\sigma_1+\frac{t}{2})), & ((s,t)\in[0,1/2]\times[0,1]) \\ f(2((1-t)\sigma_1+\frac{t}{2})(1-s)+2s-1). & ((s,t)\in[1/2,1]\times[0,1])\end{cases}$$

この H により, $f_1*f_2\simeq f$ となる.

問題 5. $0\le\sigma\le\sigma'\le 1$ を満たす σ,σ' に対して, 道 $f_{\sigma,\sigma'}$ を以下のように定める.

$$f_{\sigma,\sigma'}(s)=f((1-s)\sigma+s\sigma').$$

さらに, $0\le\sigma'\le\sigma''\le 1$ を満たす σ'' が与えられたとき, $f_{\sigma,\sigma'}*f_{\sigma',\sigma''}\sim f_{\sigma,\sigma''}$ が成り立つ. 実際, $\sigma'=(\sigma+\sigma'')/2$ のとき, $f_{\sigma,\sigma'}*f_{\sigma',\sigma''}=f_{\sigma,\sigma''}$ であることに注意すれば, 以下で定めるホモトピー $H:[0,1]\times[0,1]\to X$ によって, この同値を与えることができる.

$$H(s,t)=\begin{cases} f((1-2s)\sigma+2s((1-t)\sigma'+t\frac{\sigma+\sigma''}{2})), & ((s,t)\in[0,\frac{1}{2}]\times[0,1]) \\ f(2(1-s)((1-t)\sigma'+t\frac{\sigma+\sigma''}{2})+(2s-1)\sigma''). & ((s,t)\in[\frac{1}{2},1]\times[0,1])\end{cases}$$

以上と $f_i=f_{\sigma_{i-1},\sigma_i}$ および $f_{\sigma_0,\sigma_1}=f$ より,

$$\begin{aligned}
&(\cdots(((f_1*f_2)*f_3)*f_4)*\cdots)*f_n \\
&\quad=(\cdots(((f_{\sigma_0,\sigma_1}*f_{\sigma_1,\sigma_2})*f_{\sigma_2,\sigma_3})*f_{\sigma_3,\sigma_4})*\cdots)*f_{\sigma_{n-1},\sigma_n} \\
&\quad\sim(\cdots((f_{\sigma_0,\sigma_2}*f_{\sigma_2,\sigma_3})*f_{\sigma_3,\sigma_4})*\cdots)*f_{\sigma_{n-1},\sigma_n} \\
&\quad\sim(\cdots(f_{\sigma_0,\sigma_3}*f_{\sigma_3,\sigma_4})*\cdots)*f_{\sigma_{n-1},\sigma_n} \\
&\qquad\vdots \\
&\quad\sim f_{\sigma_0,\sigma_{n-1}}*f_{\sigma_{n-1},\sigma_n}\sim f_{\sigma_0,\sigma_n}=f
\end{aligned}$$

となり, 証明すべき同値が得られる.

問題 6. 区間 $[0,1]$ の開被覆 $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ についての Lebesgue 数を δ とする. 自然数 n を, $1/n < \delta$ となるように選ぶ. $i = 1, \ldots, n$ に対して, $\sigma_i = i/n$ とすると, $0 = \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_n = 1$ である. δ は Lebesgue 数だったので, σ_i を中心とする δ 開近傍は $f^{-1}(U)$ か $f^{-1}(V)$ に含まれる. 従って, $f([\sigma_{i-1}, \sigma_i])$ は U または V に含まれる. この $[0,1]$ 区間の分割に対して問題 5 の結果を使えば, 問題 6 の性質を持つ f_i が得られる.