トポロジー 演習問題 (2015 年 5 月 1 日)

以下, 位相空間 X の点 $x_0 \in X$ を基点とする基本群を $\pi_1(X, x_0)$ と書く. また, 自然数 n に対して, 位相空間 S^n を以下で定める.

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \ x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

問題 1. 位相空間 X の同値な道 p, p' に対して, $x_i = p(i) = p'(i)$, $(i = 0, 1)$ とおき, 準同型 α_p, $\alpha_{p'}$ を,

$$\alpha_p : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0), \qquad [f] \mapsto [(p * f) * \bar{p}],$$
$$\alpha_{p'} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0), \qquad [f] \mapsto [(p' * f) * \bar{p}'],$$

によって定めるとき, $\alpha_p = \alpha_{p'}$ であることを示せ.

問題 2. 連続写像 $\phi : X \to Y$ に対して, ϕ_* を以下で定める.

$$\phi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, \phi(x_0)), \qquad [f] \mapsto [\phi \circ f].$$

このとき, 以下が成り立つことを示せ.

(a) ϕ_* は矛盾なく定義され, 群の準同型である.

(b) 連続写像 $\psi : Y \to X$ に対して, $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$ である.

(c) $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

問題 3. 位相空間 X と Y に対し, 次の同型を示せ.

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

問題 4. $A \subset X$ が位相空間 X の強変形レトラクトであるとする. 基点 $x_0 \in A$ に対して, $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0)$ であることを示せ.

問題 5. 弧状連結な位相空間 X が, その弧状連結かつ単連結な開集合 $U, V \subset X$ によって $X = U \cup V$ と表せたとする. さらに, $U \cap V$ も弧状連結だとする. このとき, $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ であることを示せ. (ヒント: 前回の演習問題 6 を使う.)

問題 6. $n \geq 2$ のとき, $\pi_1(S^n, x_0) = \{1\}$ を示せ.

以上.

http://math.shinshu-u.ac.jp/~kgomi/class/index.html.

解答例

問題 1. 任意の $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ に対して, $\alpha_p([f]) = \alpha_{p'}([f])$ であることを示せばよい. 仮定より,

$$\begin{aligned} p \sim p' &\Rightarrow p * f \sim p' * f, \quad \bar{p} \sim \bar{p}' \\ &\Rightarrow (p * f) * \bar{p} \sim (p' * f) * \bar{p}'. \end{aligned}$$

なので, $\alpha_p([f]) = \alpha_{p'}([f])$ である.

問題 2.

(a) まず, $[f] = [f'] \in \pi_1(X, x_0)$ に対し, 定義より $f \sim f'$ である. 従って, $\phi \circ f \sim \phi \circ f'$ である. これは $\phi_*([f]) = \phi_*([f'])$ を意味するので, 確かに ϕ_* は矛盾なく定義されている. $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ に対して, $\phi \circ (f * g) = (\phi \circ f) * (\phi \circ g)$ であることが, 道の積の定義から確認できる. すなわち, $\phi_*([f][g]) = \phi_*([f])\phi_*([g])$ が成り立ち, ϕ_* は準同型である.

(b) 任意の $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ に対し, $(\psi \circ \phi) \circ f = \psi \circ (\phi \circ f)$ が成り立つので, $(\psi \circ \phi)_*([f]) = \psi_*(\phi_*([f]))$ となる. すなわち, $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$ が成り立つ.

(c) (b) と同様に, 任意の $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ に対して, $\mathrm{id}_X \circ f = f$ が成り立つので, $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ となる.

問題 3. 写像 β, γ を以下で定める.

$$\beta : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0), \quad [f] \mapsto ((\mathrm{pr}_X)_*([f]), (\mathrm{pr}_Y)_*([f]),$$
$$\gamma : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)), \quad ([f_X], [f_Y]) \mapsto [(f_X, f_Y)].$$

ただし, $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ と $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ は射影であり, $(f_X, f_Y) : [0,1] \to X \times Y$ は, $(f_X, f_Y)(s) = (f_X(s), f_Y(s))$ によって定義された道である. β は矛盾なく定義された準同型である. なぜならば, pr_X と pr_Y が連続だからである. γ も矛盾なく定義されている. 実際, 同値 $f_X \sim g_X$ と $f_Y \sim g_Y$ を与えるホモトピーが $F : [0,1] \to X$ と $G : [0,1] \to Y$ だとすれば, 同値 $(f_X, f_Y) \sim (g_X, g_Y)$ を与えるホモトピー $H : [0,1] \to X \times Y$ が, $H(s,t) = (F(s,t), G(s,t))$ によって定義できるからである. 直接計算により, $\beta \circ \gamma = \mathrm{id}$ と $\gamma \circ \beta = \mathrm{id}$ が確認できるので, β は同型となり, $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ と $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ は同型な群である.

問題 4. 仮定より, 連続写像 $r : X \to A$ であって, $r \circ i = \mathrm{id}_A$ および $i \circ r \simeq_A \mathrm{id}_A$ を満たすものがある. ただし, $i : A \to X$ は包含写像である. $r \circ i = \mathrm{id}_A$ より, $r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = \mathrm{id}$ を得るので, i_* は単射である. 同様にして, $i \circ r \simeq_A \mathrm{id}_A$ より, $i_* \circ r_* = (i \circ r)_* = \mathrm{id}$ なので, i_* は全射である. (より明示的には, 任意の $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ に対して, $i \circ r \simeq_A \mathrm{id}_A \Rightarrow i \circ r \circ f \simeq_{0,1} f \Leftrightarrow i \circ r \circ f \sim f$ であるので, $i_* \circ r_* = \mathrm{id}$ となる.)

問題 5. X が弧状連結なので, 基点 $x_0 \in X$ は $x_0 \in U \cap V$ であると仮定してよい. 任意の $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ は単位元 1 に一致することを示せばよい. 前回の演習問題 6 より, $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_{n-1} < \sigma_n = 1$ という σ_i, $(i = 0, \ldots, n)$ が存在して,

$$f_{i,i+1} : [0,1] \to X, \qquad f_{i,i+1}(s) = f((1-s)\sigma_i + s\sigma_{i+1})$$

によって定めた道 $f_{i,i+1}$ は, U または V の道であり,

$$f \sim (\cdots((f_{0,1} * f_{1,2}) * f_{2,3}) * \cdots) * f_{n-1,n}$$

が成り立つ. ここで, U, V と $U \cap V$ が弧状連結であることから, 次のような道 $p_i : [0,1] \to X$, $(i = 0, \ldots, n)$ が存在する:

- $p_i(0) = x_0$ と $p_i(1) = f(\sigma_i)$ が成り立つ.
- $f(\sigma_i) \subset U \cap V$ ならば, p_i は $U \cap V$ の道である.
- $f(\sigma_i) \not\subset U \cap V$ だが $f(\sigma_i) \subset U$ ならば, p_i は U の道である.
- $f(\sigma_i) \not\subset U \cap V$ だが $f(\sigma_i) \subset V$ ならば, p_i は V の道である.

これらの道 p_i を使って, 道 $f'_i : [0,1] \to X$ を $f'_i = (p_i * f_{i,i+1}) * \bar{p}_i$ で定めると, これは $f'_i(0) = f'_i(1) = x_0$ を満たす. さらに, 各 f'_i は U または V の道である. U と V が単連結だという仮定を使うと, U または V の中で $f'_i \sim c_{x_0}$ なので, $\pi_1(X, x_0)$ の要素として $[f'_i] = 1$ である. さて, $p_i * \bar{p}_i \sim c_{x_0} \sim \bar{p}_i * p_i$ に注意すれば,

$$f \sim (\cdots((f'_{0,1} * f'_{1,2}) * f'_{2,3}) * \cdots) * f'_{n-1,n}$$

が成り立つ. 従って, $\pi_1(X, x_0)$ の要素として,

$$[f] = [f'_{0,1}][f'_{1,2}]\cdots[f'_{n-1,n}] = 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$$

となる.

問題 6. U と V を以下で定める.

$$U = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n |\ x_{n+1} > -1\},$$
$$V = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n |\ x_{n+1} < 1\}.$$

U と V は可縮なので, 弧状連結かつ単連結である. また, $U \cap V$ の部分空間

$$A = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n |\ x_{n+1} = 0\}$$

は $U \cap V$ の強変形レトラクトであり, さらに S^{n-1} に同相であるので, 弧状連結である. 従って, 問題 5 の結果から, $\pi_1(S^n, x_0) = \{1\}$ である.