

トポロジー 演習問題 (2015 年 5 月 13 日)

- 問題 1. 頂点の集合が  $\{v_0, v_1, v_2\}$  であるような単体複体  $K$  の例を全て列挙せよ.
- 問題 2. 頂点の集合が  $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$  であるような 3 次元単体複体  $K$  の例を挙げよ.
- 問題 3. 有限次元であるが, 有限ではない単体複体の例を挙げよ. (ヒント: 0 次元の有限ではない単体複体や, 1 次元の有限ではない単体複体の例を考えよ.)
- 問題 4. 有限単体複体は有限次元であることを示せ.
- 問題 5. 単体複体  $K$  に  $q$  次元単体が含まれるとき,  $p = 0, \dots, q - 1$  を次元に持つ単体が含まれることを示せ.
- 問題 6. 単体複体  $K$  の  $q$  次元骨格  $K^q$  は,  $K$  の部分複体であることを示せ.

以上.

## 解答例

問題 1.  $K = \emptyset$  という場合を除けば、全部で 9 個ある:

$$K_1 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}\},$$

$$K_2 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}\},$$

$$K_3 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_2\}\},$$

$$K_4 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_1, v_2\}\},$$

$$K_5 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}\},$$

$$K_6 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}\},$$

$$K_7 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}\},$$

$$K_8 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}\},$$

$$K_9 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}.$$

問題 2. 以下のものに限る:

$$K = \left\{ \begin{array}{l} \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \\ \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \\ \{v_0, v_1, v_2\}, \{v_0, v_1, v_3\}, \{v_0, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_0, v_1, v_2, v_3\} \end{array} \right\}.$$

問題 3.

問題 4. 単体複体  $K$  は有限なので、 $K$  に含まれる単体の次元の最大値が意味を持つ。その次元を  $n$  とすれば、 $(n+1)$  単体は  $K$  の中には存在しないので、 $K$  は次元が  $n$  の有限次元単体複体である。

問題 5.  $q$  次元単体  $s$  を、 $K$  の頂点を用いて、 $s = \{v_0, v_1, \dots, v_q\}$  表したとする。単体複体の定義より、 $s$  の部分集合は  $K$  の単体である。特に、 $p = 0, 1, \dots, q-1$  に対して  $\{v_0, \dots, v_p\}$  は  $K$  の単体であるが、これは  $p$  次元である。

問題 6.  $q$  次元骨格の定義より、 $K$  の頂点 (つまり 0 次元単体) は全て  $K^q$  に含まれる。そこで、 $K^q$  の頂点の集合として  $K$  の頂点の集合を考える。すると、 $K^q$  の単体は  $K^q$  の頂点の集合の部分集合になっている。また、 $K^q$  のある単体  $s \in K^q \subset K$  に対し、その任意の面  $s' \subset s$  は  $K$  の単体であって、 $s$  の次元以下である。再び  $q$  次元骨格の定義より、 $s' \in K^q$  である。以上によって、 $K^q$  が単体複体であることが示せた。