トポロジー 演習問題 (2015 年 5 月 20 日)

問題 1. 位相空間 X の有限開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとき,

$$K(\mathcal{U}) = \{\{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\} \mid \alpha_i \in A, U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset\}$$

と定める. このとき, $K(\mathcal{U})$ は頂点集合を A とする単体複体であることを示せ.

問題 2. 有限単体複体 K に対して, $|K|$ の開被覆を $\mathcal{U} = \{\mathrm{St}(v)\}_{v \in V(K)}$ で定める. このとき, K と $K(\mathcal{U})$ の間に, 全単射な単体写像を構成せよ.

問題 3. 有限単体複体の間の単体写像 $\varphi : K_1 \to K_2$ に対して定まる写像 $|\varphi| : |K_1| \to |K_2|$ が連続であることを示せ. (ヒント: K_1 と K_2 だけに依存する定数 $C > 0$ であって, 「任意の $\alpha, \beta \in |K_1|$ に対し, $d(|\varphi|(\alpha), |\varphi|(\beta)) \leq C \cdot d(\alpha, \beta)$」を満たすものが存在することを示す.)

問題 4. 単体複体の K と, その実現の部分空間 $A \subset |K|$ が与えられたとする. ある単体 $s \in K$ に対して $A \subset |s|$ が成り立つとき, $A \subset |s|$ を満たす単体 $s \in K$ のうちで s を与える頂点の個数が最小のものを, <u>A の台</u> と呼ぶ.

(a) ある単体 $s \in K$ に対して, $A \subset \langle s \rangle$ であるとき, A は台を持ち, その台は s であることを示せ.

(b) 任意の $\alpha \in |K|$ に対して, $\{\alpha\}$ の台は $\alpha \in \langle s \rangle$ を満たす単体 s であることを示せ.

問題 5. 単体複体 K の部分複体 L が与えられたとする. K の頂点 $v_0, \ldots, v_q$ が L の単体の頂点になるための必要十分条件は,

$$\bigcap_{i=0,\ldots,q} \mathrm{St}(v_i) \cap |L| = \emptyset$$

であることを示せ.

以上.

http://math.shinshu-u.ac.jp/~kgomi/class/index.html.

解答例

問題 1. まず, 各頂点 $\alpha \in K(\mathcal{U}) = A$ に対しては, $U_\alpha \neq \emptyset$ なので, $\{\alpha\} \in K(\mathcal{U})$ である. また, $\{\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_k}\}$ が $K(\mathcal{U})$ の単体であるとき, 任意の $\{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_\ell}\} \subset \{\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_k}\}$ に対して,

$$U_{\alpha_{i_0}} \cap \cdots \cap U_{\alpha_{i_k}} \subset U_{\alpha_{j_0}} \cap \cdots \cap U_{\alpha_{j_\ell}} \neq \emptyset$$

である. 従って, $\{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_\ell}\} \in K(\mathcal{U})$ である. 以上で $K(\mathcal{U})$ が単体複体になることが示せた.

問題 2. K の頂点 v に対して, $\mathrm{St}(v) \neq \emptyset$ なので, $v \mapsto v$ により頂点の間の写像 $V(K) \to V(\mathcal{U})$ が定義できる. K の頂点 v, v' について, $\mathrm{St}(v) \cap \mathrm{St}(v') \neq \emptyset$ となるのは, ある単体 $s \in K$ であって, $v, v' \in s$ であることが必要十分条件である. これに注意すると, 上で定めた頂点の間の写像が, 単体写像 $K \to K(\mathcal{U})$ を与えることがわかる. $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ が K の単体ならば, $\mathrm{St}(v_{i_1}) \cap \cdots \cap \mathrm{St}(v_{i_k}) \neq \emptyset$ なので, $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ は $K(\mathcal{U})$ の単体である. この逆も成り立つので, 上の単体写像は全単射である.

問題 3. $V(K_i)$ の要素の個数を n_i と書くと, 次を得る:

$$\begin{aligned}
d(|\varphi|(\alpha), |\varphi|(\beta)) &= \sqrt{\sum_{w \in V(K_2)} \Big(|\varphi|(\alpha)(w) - |\varphi|(\beta)(w) \Big)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{w \in V(K_2)} \Big(\sum_{v \in \varphi^{-1}(w)} \alpha(v) - \sum_{v \in \varphi^{-1}(w)} \beta(v) \Big)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{w \in V(K_2)} \Big(\sum_{v \in \varphi^{-1}(w)} (\alpha(v) - \beta(v)) \Big)^2} \leq \sqrt{\sum_{w \in V(K_2)} n_1 \sum_{v \in \varphi^{-1}(w)} (\alpha(v) - \beta(v))^2} \\
&\leq \sqrt{n_1 \sum_{w \in V(K_2)} \sum_{v \in V(K_1)} (\alpha(v) - \beta(v))^2} \leq \sqrt{n_1 n_2} \sqrt{\sum_{v \in V(K_1)} (\alpha(v) - \beta(v))^2}.
\end{aligned}$$

よって, $C = \sqrt{n_1 n_2}$ とおけば, 任意の $\alpha, \beta \in K_1$ に対し, $d(|\varphi|(\alpha), |\varphi|(\beta)) \leq C \cdot d(\alpha, \beta)$ が成り立つ. $|K_i|$ の位相は距離で定義していたので, 上の不等式から $|\varphi|$ が連続であることが示せる.

問題 4. (a) $\langle s \rangle \subset |s|$ なので, A は台を持つ. s が A の台であることを言うためには, s の面 $s' \subset s$ であって $s' \neq s$ なるものに対して, $A \not\subset |s'|$ であることを言えばよい. これは, $|s'| \not\subset \langle s' \rangle$ であることから従う.

(b) (a) を $A = \{\alpha\}$ に適用すればよい.

問題 5. もし $s \in L$ が $v_0, \dots, v_q$ を頂点とする単体ならば, $\langle s \rangle \subset \mathrm{St}(v_i)$ が $i = 0, \dots, q$ に対して成り立ち, $\langle s \rangle \subset |L|$ も成り立つ. 従って, $\cap_i \mathrm{St}(v_i) \cap |L| \neq \emptyset$ である. 逆に, $\cap_i \mathrm{St}(v_i) \cap |L| \neq \emptyset$ のとき, $\alpha \in \cap_i \mathrm{St}(v_i) \cap |L|$ に対して, $\alpha(v_i) \neq 0$ が $i = 0, \dots, q$ に対して成り立ち, α の台 s は, L の単体であって $v_0, \dots, v_q$ を頂点とするものである. すると $\{v_0, \dots, v_q\} \subset s$ なので, L が単体複体であることから $\{v_0, \dots, v_q\} \subset L$ である.