トポロジー 演習問題 (2015 年 5 月 27 日)

問題 1. N 次元ベクトル $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^N$ が与えられたとする. 任意の

$$x, y \in \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i p_i \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, t_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{k} t_i = 1 \right\}$$

に対して, 以下の不等式が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned} |x-y| &\le \max\{|x-p_j| \mid j=1,\ldots,k\} \\ &\le \max\{|p_i-p_j| \mid i,j=1,\ldots,k\}. \end{aligned}$$

ただし $|\cdot|$ は $\mathbb{R}^N$ の標準的なノルムである.

問題 2. 単体複体 K の m 次元単体 $s \in K$ に対し, その面からなる単体複体を $\bar{s} = \{t \in K |\ t \subset s\}$ とおく. また, $s' \in \mathrm{sd}(\bar{s})$ を $\bar{s}$ の重心細分の任意の単体とする.

- 単体 $s \in K$ を $s = \{v_0, \ldots, v_m\}$ と表す. ここで, $v_0, \ldots, v_m$ は K の頂点である. これらの頂点 v_i に対応する $|K|$ の点 (ベクトル) を同じ記号 v_i で表す.
- 単体 s' を $s' = \{b_{s_0}, b_{s_1}, \ldots, b_{s_q}\}$ と表す. ここで,

$$s_0 \subsetneqq s_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq s_q \subset s$$

  は s の面の列で,

$$\begin{aligned} s_0 &= \{v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}\}, \\ s_1 &= \{v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}, v_{i_{k+1}}\}, \\ &\vdots \\ s_q &= \{v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}, v_{i_{k+1}}, \ldots, v_{i_{k+q}}\}, \end{aligned}$$

  と表せるとする. $b_{s_\ell} \in |s|$ は単体 s_ℓ の重心である.

(a) 任意の $x, y \in |s'|$ に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$|x-y| \le \max\{|b_{s_{\ell'}} - b_{s_\ell}| \mid \ell, \ell' = 0, \ldots, q\}.$$

(b) $\ell' \le \ell$ であるとき, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$|b_{s_{\ell'}} - b_{s_\ell}| \le \max\{|b_{s_{\ell'}} - v_{i_j}| \mid j = 0, \ldots, k+\ell\}$$

(c) 各 $j = 0, \ldots, k+\ell$ に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$|b_{s_{\ell'}} - v_{i_j}| \le \frac{k+\ell}{k+\ell+1} \max\{|v_{i_{j'}} - v_{i_j}| \mid \ j' = 0, \ldots, k+\ell\}$$

(d) 以下の不等式が成り立つことを示せ.

$$\mathrm{diam}|s'| \le \frac{m}{m+1} \mathrm{diam}|s|.$$

ただし $|s'|$ の直径は $|K|$ についての直径である.

以上.

解答例

問題 1. $y = \sum_{j=1}^k t_j p_j$ と表すと, 次が得られる:

$$\begin{aligned} |x-y| &= \left| \sum_{j=1}^k t_j x - \sum_{j=1}^k t_j p_j \right| = \left| \sum_{j=1}^k t_j (x - p_j) \right| \leq \sum_{j=1}^k t_j |x - p_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^k t_j \max\{|x-p_j| \mid j = 1, \ldots, k\} = \max\{|x-p_j| \mid j = 1, \ldots, k\}. \end{aligned}$$

x について同様の議論により, 次の不等式が得られる:

$$|x - p_j| \leq \max\{|p_i - p_j| \mid i = 1, \ldots, k\}$$

この不等式と先に示した不等式をあわせて, 最終的に以下の不等式を得る:

$$|x - y| \leq \max\{|p_i - p_j| \mid i, j = 1, \ldots, k\}.$$

問題 2.

(a) $s' = \{b_{s_0}, \ldots, b_{s_q}\}$ だったので, $|s'|$ は次のように定義されている:

$$|s'| = \left\{ \sum_{\ell=0}^q t_\ell b_{s_\ell} \middle| \, t_\ell \in [0,1], \sum_{\ell=0}^q t_\ell = 1 \right\}.$$

問題 1 の結果より, 示すべき不等式が成り立つことがわかる.

(b) 重心の表示 $b_{s_\ell} = \frac{1}{k+\ell+1} \sum_{j=0}^{k+\ell} v_{i_j}$ から,

$$b_{s_\ell}, b_{s_{\ell'}} \in \left\{ \sum_{j=0}^{k+\ell} t_j v_{i_j} \middle| \, t_j \in [0,1], \sum_{j=0}^{k+\ell} t_j = 1 \right\}$$

となっている. 問題 1 の結果より, 示すべき不等式が成り立つことがわかる.

(c) $b_{s_{\ell'}} = \frac{1}{k+\ell'+1} \sum_{j'=0}^{k+\ell'} v_{i_{j'}}$ と表示すると,

$$\begin{aligned} |b_{s_{\ell'}} - v_{i_j}| &= \left| \frac{1}{k+\ell'+1} \sum_{j'=0}^{k+\ell'} (v_{i_{j'}} - v_{i_j}) \right| \leq \frac{1}{k+\ell'+1} \sum_{j'=0}^{k+\ell'} |v_{i_{j'}} - v_{i_j}| \\ &\leq \frac{k+\ell'}{k+\ell'+1} \max\{|v_{i_{j'}} - v_{i_j}| \mid j' = 0, \ldots, k+\ell'\} \\ &\leq \frac{k+\ell}{k+\ell+1} \max\{|v_{i_{j'}} - v_{i_j}| \mid j' = 0, \ldots, k+\ell\}. \end{aligned}$$

を得る. ここで最後に, $\ell' \leq \ell$ と $\frac{k+\ell'}{k+\ell'+1} \leq \frac{k+\ell}{k+\ell+1}$ を使った.

(d) $k + \ell \leq k + q \leq m$ なので, $\frac{k+\ell}{k+\ell+1} \leq \frac{m}{m+1}$ である. また, $|v_{i_{j'}} - v_{i_j}| \leq \mathrm{diam}|s|$ であるので, これまでの結果を総合して示すべき不等式が得られる:

$$\begin{aligned} \mathrm{diam}|s'| &\leq \frac{m}{m+1} \max \left\{ |v_{i_{j'}} - v_{i_j}| \middle| \begin{array}{l} j' = 0, \ldots, k+\ell', j = 0, \ldots, k+\ell, \\ \ell, \ell' = 0, \ldots, q \end{array} \right\} \\ &\leq \frac{m}{m+1} \mathrm{diam}|s|. \end{aligned}$$