トポロジー 演習問題 (2015 年 6 月 3 日)

問題 1. 単体複体 K_1, K_2 および, 連続写像 $f : |K_1| \to |K_2|$ が与えられたとする．単体写像 $\varphi : K_1 \to K_2$ に対して, 以下の性質 (a) と (b) を考える．

(a) $\alpha \in |K_1|$ と $s_2 \in K_2$ に対し, $f(\alpha) \in |s_2|$ ならば $|\varphi|(\alpha) \in |s_2|$ である．

(b) $\alpha \in |K_1|$ と $s_2 \in K_2$ に対し, $f(\alpha) \in \langle s_2 \rangle$ ならば $|\varphi|(\alpha) \in |s_2|$ である．

このとき, 以下を示せ．

[1] φ に対して (a) が成り立つならば, (b) が成り立つ．

[2] φ に対して (b) が成り立つならば, (a) が成り立つ．(ヒント: $f(\alpha) \in |s_2|$ に対して, $\alpha \in \langle s' \rangle$ となる単体 $s' \in K_2$ が存在する．cf. 5 月 20 日の問題 4.)

問題 2. 単体写像 $\varphi : K_1 \to K_2$ が, 連続写像 $f : |K_1| \to |K_2|$ の単体近似だとする．K_1 の頂点 $v_1 \in V(K_1)$ に対して, $|\{v_1\}| \subset |K_1|$ を構成する唯一の点を $|v_1|$ とする．ある頂点 $v_2 \in V(K_2)$ に対して, $f(|v_1|) = |v_2| \in |K_2|$ が成り立つならば, $|\varphi|(|v_1|) = f(|v_1|)$ が成り立つことを示せ．

問題 3. 単体複体 K_1, K_2 および, 連続写像 $f : |K_1| \to |K_2|$ が与えられたとする．頂点の集合の間の写像 $\varphi : V(K_1) \to V(K_2)$ に対して, 以下の (a) が成り立つならば (b) が成り立つことを示せ．

(a) $\varphi : V(K_1) \to V(K_2)$ は f の単体近似 $\varphi : K_1 \to K_2$ を与える．

(b) 任意の $v \in V(K_1)$ に対して, $f(\mathrm{St}(v)) \subset \mathrm{St}(\varphi(v))$ が成り立つ．

以上.

解答例

問題 1.

[1] $f(\alpha) \in \langle s_2 \rangle$ とする．$\langle s_2 \rangle \subset |s_2|$ なので，$f(\alpha) \in |s_2|$ が成り立つ．すると (a) より $|\varphi|(\alpha) \in |s_2|$ が成り立つ．

[2] $f(\alpha) \in |s_2|$ とする．単体 $s_2' \in K_2$ であって，$f(\alpha) \in |s_2'|$ を満たすもののうちで，次元 (s_2' を与える頂点の個数) が最小のものを考える．このとき $f(\alpha) \in \langle s_2' \rangle$ が成り立つ．すると (b) より $|\varphi|(\alpha) \in |s_2'|$ である．また，s_2' を特徴づける性質を使うと，$s_2' \subset s_2$ を示すことができる．従って，$|s_2'| \subset |s_2|$ が成り立つ．以上から，$|\varphi|(\alpha) \in |s_2|$ が成り立つ．

問題 2. 単体写像 $\varphi : K_1 \to K_2$ が連続写像 $f : |K_1| \to |K_2|$ の単体近似であることの定義は，$\alpha \in |K_1|$ と $s_2 \in K_2$ が $f(\alpha) \in |s_2|$ を満たすとき，$|\varphi|(\alpha) \in |s_2|$ が成り立つことであった．今，$\alpha = |v_1| \in |K_1|$ とする．また，$s_2 = \{v_2\} \in K_2$ とすると，$|s_2| = \{|v_2|\}$ が成り立つ．従って，$f(|\alpha|) \in |s_2|$ が成り立っているので，$|\varphi|(|v_1|) \in |s_2|$ が成り立つ．これより，$|\varphi|(|v_1|) = |v_2| = f(|v_1|)$ が得られる．

問題 3. 任意の $\alpha \in \mathrm{St}(v)$ に対して，$f(\alpha) \in \mathrm{St}(\varphi(v))$ であることを以下の順序で示すことができる．

(1) $\mathrm{St}(v) = \{\alpha' \in |K_1| \mid \alpha'(v) \neq 0\}$ と定義されているので，$\alpha(v) \neq 0$ である．すると，$|\varphi|$ の定義より，

$$\big(|\varphi|(\alpha)\big)(\varphi(v)) = \sum_{v_1 \in \varphi^{-1}(\varphi(v))} \alpha(v_1) \neq 0$$

である．

(2) $f(\alpha) \in \langle s_2 \rangle$ となる $s_2 \in K_2$ が (一意に) 存在する．(a) により φ は f の単体近似だったので，$|\varphi|(\alpha) \in |s_2|$ が成り立つ．$|s_2| = \{\alpha'' \in |K_2| \mid \alpha''(v_2) \neq 0 \Rightarrow v_2 \in s_2\}$ と定義されているので，(1) より $\varphi(v) \in s_2$ となる．

(3) $\langle s_2 \rangle = \{\alpha'' \in |K_2| \mid \alpha''(v_2) \neq 0 \Leftrightarrow v_2 \in s_2\}$ と定義されていたので，(2) より $\big(f(\alpha)\big)(\varphi(v)) \neq 0$ となる．

(4) $\mathrm{St}(\varphi(v)) = \{\alpha'' \in |K_2| \mid \alpha''(\varphi(v)) \neq 0\}$ と定義されているので，(3) より $f(\alpha) \in \mathrm{St}(\varphi(v))$ である．