トポロジー 演習問題 (2015 年 6 月 17 日)

問題 1. $\mathbb{R}^2$ の部分空間 S^1 を以下で定める:

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

$S_1^1 = S^1$ および $S_2^1 = S^1$ とする. ある点 $p_1 \in S_1^1$ と $p_2 \in S_2^1$ を同一することにより, S_1^1 と S_2^1 から得られる位相空間を $S_1^1 \vee S_2^1$ とする. 基本群 $\pi_1(S_1^1 \vee S_2^1)$ の表示を求めよ.

問題 2. 位相空間 T^2 を, $\mathbb{R}^2$ の商空間として定める: $T^2 = \mathbb{R}^2/\sim$. ただし同値関係 $\sim$ は以下で与えられるものとする.

$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{ある } m,n \in \mathbb{Z} \text{ が存在して,} \\ x' - x = m \text{ と } y - y' = n \text{ が成り立つ.} \end{array}$$

基本群 $\pi_1(T^2)$ の表示を求めよ.

問題 3. 位相空間 M を, $[-1,1] \times \mathbb{R}$ の商空間として定める: $M = ([-1,1] \times \mathbb{R})/\sim$. ただし同値関係 $\sim$ は以下で与えられるものとする:

$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{ある } n \in \mathbb{Z} \text{ が存在して,} \\ x' - x = n \text{ と } y' = (-1)^n y \text{ が成り立つ.} \end{array}$$

また, M の部分空間 ∂M を $\partial M = (\{-1,1\} \times \mathbb{R})/\sim$ で定める.

(a) M と S^1 はホモトピー同値であることを示せ.

(b) ∂M と S^1 は同相であることを示せ.

(c) (b) で与えられる同相を $h : S^1 \to \partial M$ とする. また, $i : \partial M \to M$ を包含写像とする. これらの写像の合成 $ih : S^1 \to M$ が誘導する準同型 $(ih)_* : \pi_1(S^1) \to \pi_1(M)$ を, $\pi_1(S^1)$ と $\pi_1(M)$ の適当な表示のもとで求めよ.

問題 4. $\mathbb{R}^2$ の部分空間 D^2 を以下で定める:

$$D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$\partial M \subset M$ と $S^1 \subset D^2$ を同相を使って同一視することにより, M と D^2 から得られる位相空間を $M \cup D^2$ とする. 基本群 $\pi_1(M \cup D^2)$ の表示を求めよ.

問題 5. $i = 1,2$ に対して, $M_i = M$ および $\partial M_i = \partial M$ とする. ∂M_1 と ∂M_2 を同一視することにより, M_1 と M_2 から得られる位相空間を $M_1 \cup M_2$ とする. 基本群 $\pi_1(M_1 \cup M_2)$ の表示を求めよ.

問題 6. $\mathbb{R}^3$ の部分空間 S^2 を以下で定める:

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

S^2 の商空間として $\mathbb{R}P^2$ を定める: $\mathbb{R}P^2 = S^2/\sim$. ただし同値関係 $\sim$ は以下で与えられるものとする:

$$(x,y,z) \sim (x',y',z') \Leftrightarrow \begin{array}{l} (x,y,z) = (x',y',z') \text{ または,} \\ (x,y,z) = (-x',-y',-z') \text{ が成り立つ.} \end{array}$$

基本群 $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ の表示を求めよ.

以上.

解答例: いずれも Seifert-van Kampen の定理を使う.

問題 1. $X = S^1_1 \vee S^1_2$ とし, 同一視した p_1 と p_2 に対応する点を $p \in X$ とする. $i = 1, 2$ に対し, $S^1_i \backslash \{p\} \subset X$ の点 q_i を選ぶ. すると, $U_1 = X \backslash \{q_2\}$ および $U_2 = X \backslash \{q_1\}$ は X の開集合であって $U_1 \cup U_2 = X$ を満たす. また, $S^1_i \simeq S^1$ なので U_i は弧状連結である. さらに, $U_1 \cap U_2$ は可縮なので, 特に弧状連結である. U_i と $U_1 \cap U_2$ の基本群の表示

$$\pi_1(U_i) \cong \langle S_i | R_i \rangle, \qquad \pi_1(U_1 \cap U_2) \cong \langle S | R \rangle$$

として, $S_i = \{a_i\}$, $R_i = \emptyset$, $S = R = \emptyset$ となるものを考える. 包含写像 $U_1 \cap U_2 \to U_i$ が誘導する準同型 $\varphi_i : \langle \emptyset \rangle \to \langle S_i | R_i \rangle$ のもとで, 空後の像は空後である. 空後は単位元に相当するので, $\pi_1(X)$ の表示として次が得られる:

$$\pi_1(X) = \langle a_1, a_2 | \{1\} \rangle.$$

しかし, 1 は自明な関係式なので, これを省略して, 最終的に次の表示を得る:

$$\pi_1(X) = \langle a_1, a_2 \rangle.$$

問題 2. $\epsilon = 1/100$ とし, 開集合 $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \subset \mathbb{R}^2$ を以下で定める:

$$\tilde{U}_1 = \bigcup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x - m)^2 + (y - n)^2 \leq (1/10 + \epsilon)^2\},$$
$$\tilde{U}_2 = \mathbb{R}^2 \backslash \bigcup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x - m)^2 + (y - n)^2 \leq (1/10 - \epsilon)^2\}.$$

自然な射影 $\mathbb{R}^2 \to T^2$ による $\tilde{U}_i$ の像を U_i とする: $U_i = \tilde{U}_i / \sim$. すると, U_i は開集合であり, $T^2 = U_1 \cup U_2$ を満たす. U_1 は可縮であり, $U_2 \simeq S^1 \vee S^1$ なので, いずれも弧状連結である. $U_1 \cap U_2 \simeq S^1$ も弧状連結である. これらの基本群の表示 $\pi_1(U_i) \cong \langle S_i | R_i \rangle$ と $\pi_1(U_1 \cap U_2) \cong \langle S | R \rangle$ は以下で与えられる:

$$\begin{cases} S_1 = \emptyset, \\ R_1 = \emptyset. \end{cases} \qquad \begin{cases} S_2 = \{a, b\}, \\ R_2 = \emptyset. \end{cases} \qquad \begin{cases} S = \{c\}, \\ R = \emptyset. \end{cases}$$

包含写像 $U_1 \cap U_2 \to U_i$ が誘導する準同型 $\varphi_i : \langle S | R \rangle \to \langle S_i | R_i \rangle$ は, $\varphi_1(c) = 1$ および $\varphi_2(c) = aba^{-1}b^{-1}$ と記述することができる. 従って, $\pi_1(T^2)$ は以下の表示を持つ:

$$\pi_1(T^2) \cong \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle.$$

問題 3.

(a) 写像 $f : S^1 \to M$ と $g : M \to S^1$ を以下で定める:

$$f : S^1 \to M, \qquad f(\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta) = [\theta, 0],$$
$$g : M \to S^1, \qquad g([x, y]) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi y).$$

すると $g \circ f = 1$ である. 一方で $f \circ g$ から恒等写像 id_M へのホモトピーが $F([x, y], t) = [x, ty]$ で与えられるので, M と S^1 はホモトピー同値である.

(b) $h : S^1 \to \partial M$ を $h(\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta) = [2\theta, 1]$ とすると, これは矛盾なく定義されており, さらに全単射であることが確かめられる. 連続写像 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(\theta \mapsto (2\theta, 1))$ から h が誘導されているので, h も連続である. また, S^1 はコンパクトである. M が Hausdorff であることは, 同値関係の定義から確かめられる. 従って, h は同相写像である.

(c) (a) より, $\pi_1(M) \cong \pi_1(S^1) \cong \langle a\rangle$ と表示する．同様に (b) より $\pi_1(\partial M) \cong \pi_1(S^1) \cong \langle b\rangle$ と表示する． b が代表する道は, $\ell : [0,1] \to S^1$, $(\ell(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t))$ で与えられる．すると, $(ih_*\ell)(t) = [2t, 0]$ である．これは, ホモトピー同値 g が与える同型 $\pi_1(M) \cong \pi_1(S^1)$ のもとで, a^2 を代表している．従って, $(ih)_*(b) : \langle b\rangle \to \langle a\rangle$ は $(ih)_*(b) = a^2$ で与えられる．

問題 4. M と D^2 の開集合 V_1 と V_2 を以下のようにとる:

$$V_1 = \{(x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R} |\ |x| > 1/10\}/\sim,$$
$$V_2 = \{(x,y) \in D^2 |\ x^2 + y^2 < 1/100\}.$$

$U_1 = M \cup V_2$ および $U_2 = V_1 \cup D^2$ とすると, これらは $M \cup D^2$ の開集合で $U_1 \cup U_2 = M \cup D^2$ を満たす． $U_1 \simeq M \simeq S^1$, $U_2 \simeq \{(0,0)\}$ および $U_1 \cap U_2 \simeq \partial M \simeq S^1$ は弧状連結である．それぞれの基本群の表示 $\pi_1(U_i) \cong \langle S_i|R_i\rangle$ と $\pi_1(U_1 \cap U_2) \cong \langle S|R\rangle$ を次のようにとる:

$$\begin{cases} S_1 = \{a\}, \\ R_1 = \emptyset. \end{cases} \qquad \begin{cases} S_2 = \emptyset, \\ R_2 = \emptyset. \end{cases} \qquad \begin{cases} S = \{b\}, \\ R = \emptyset. \end{cases}$$

包含写像 $U_1 \cap U_2 \to U_i$ が誘導する準同型を $\varphi_i : \langle S|R\rangle \to \langle S_i|R_i\rangle$ とする．問題 2 の結果から $\varphi_1(b) = a^2$ である．一方で $\varphi_2(b) = 1$ である．従って, 次の表示が得られる:

$$\pi_1(M \cup D^2) \cong \langle a|a^{-2} \cdot 1\rangle \cong \langle a|a^2\rangle.$$

問題 5. 問題 4 の場合と同様な方法で, $M_1 \cup M_2$ の弧状連結な開集合 U_1, U_2 であって, $U_i \simeq M_i$ および $U_1 \cap U_2 \simeq \partial M \approx S^1$ というものがとれる．基本群の表示 $\pi_1(U_i) \cong \langle S_i|R_i\rangle$ と $\pi_1(U_1 \cap U_2) \cong \langle S|R\rangle$ を次のようにとる:

$$\begin{cases} S_1 = \{a_1\}, \\ R_1 = \emptyset. \end{cases} \qquad \begin{cases} S_2 = \{a_2\}, \\ R_2 = \emptyset. \end{cases} \qquad \begin{cases} S = \{b\}, \\ R = \emptyset. \end{cases}$$

包含写像 $U_1 \cap U_2 \to U_i$ が誘導する準同型を $\varphi_i : \langle S|R\rangle \to \langle S_i|R_i\rangle$ とする．問題 2 の結果から $\varphi_i(b) = a_i^2$ である．従って次の表示が得られる:

$$\pi_1(M_1 \cup M_2) \cong \langle a_1, a_2|a_1^{-2}a_2^2\rangle.$$

問題 6. S^2 の開集合 $\tilde{U}_1$ と $\tilde{U}_2$ を次のようにとる:

$$\tilde{U}_1 = \{(x,y,z) \in S^2 |\ |z| < 3/4\},$$
$$\tilde{U}_2 = \{(x,y,z) \in S^2 |\ |z| > 1/4\}.$$

自然な射影 $S^2 \to \mathbb{R}P^2$ による $\tilde{U}_i$ の像として, 開集合 $U_i \subset \mathbb{R}P^2$ を定める．これらの開集合について Seifert-van Kampen の定理を使うことができ, 問題 4 と同じ計算で, $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \langle a|a^2\rangle$ が得られる．($\mathbb{R}P^2$ は $M \cup D^2$ と同相であり, この同相のもとで, ここで選んだ U_i と問題 4 の U_i が同相になる.)