トポロジー 演習問題 (2015 年 7 月 8 日)

問題 1. 群 $\mathbb{Z}^2$ の $\mathbb{R}^2$ への作用 $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $(m,n,x,y) \mapsto (m+x, n+y)$ によって定義し, 自然な射影 $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ が定める被覆を考える.

(a) 道 $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $(f(t) = [t,t])$ の持ち上げ $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ であって, $\tilde{f}(0) = (1,0)$ を満たすものを具体的に書け.

(b) 道 $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $(f(t) = [2t,3t])$ の持ち上げ $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ であって, $\tilde{f}(0) = (0,1)$ を満たすものを具体的に書け.

問題 2. $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ の $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ への作用 $\mathbb{Z}_2 \times S^2 \to S^2$ を $((-1)^k, x, y, z) = ((-1)^k x, (-1)^k y, (-1)^k z)$ によって定義し, 自然な射影 $p : S^2 \to S^2/\mathbb{Z}_2$ が定める被覆を考える.

(a) 道 $f : [0,1] \to S^2/\mathbb{Z}_2$, $(f(t) = [\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0])$ の持ち上げ $\tilde{f} : [0,1] \to S^2$ を全て記述せよ.

(b) 道 $f : [0,1] \to S^2/\mathbb{Z}_2$, $(f(t) = [\cos \pi t, \sin \pi t, 0])$ の持ち上げ $\tilde{f} : [0,1] \to S^2$ を全て記述せよ.

問題 3. $p : \tilde{X} \to X$ を被覆とする. $x \in X$ における定値写像 $c : [0,1] \to X$ の持ち上げ $\tilde{c}$ は定値写像に限ることを示せ. (ヒント: 持ち上げの一意性を使う.)

問題 4. $p : \tilde{X} \to X$ を被覆とし, $\varphi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ を連続写像であって $p \circ \varphi = p$ を満たすものとする. もしある点 $\tilde{x} \in X$ に対して $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$ が成り立つならば, φ は恒等写像であることを示せ. (ヒント: 写像 $p : \tilde{X} \to X$ の持ち上げを考える.)

問題 5. 被覆 $p : \tilde{X} \to X$ と点 $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ が与えられたとする. このとき, 写像

$$\varphi : \ \pi_1(X, p(\tilde{x}_0)) \to p^{-1}(p(\tilde{x}_0))$$

を, $\varphi([f]) = \tilde{f}(0)$ で定める. ここで, $\tilde{f} : [0,1] \to \tilde{X}$ は, 道 $f : [0,1] \to X$ の持ち上げであって $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ を満たす (ただ一つの) ものである.

(a) $\tilde{X}$ が弧状連結ならば, φ は全射であることを示せ.

(b) $\tilde{X}$ が単連結ならば, φ は全単射であることを示せ.

(c) $\tilde{X}$ が連結ならば, φ は全単射 $p_*(\pi_1(X, \tilde{x}_0)) \backslash \pi_1(\tilde{X}, p(\tilde{x}_0)) \cong p^{-1}(p(\tilde{x}_0))$ を誘導することを示せ.

問題 6. 全単射 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ があることを示せ.

問題 7. $p : \tilde{X} \to X$ を被覆とし, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ を任意の点とする. p が誘導する準同型

$$p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$$

は単射であることを示せ.

以上.

解答例

問題 1. (a) $\tilde{f}(t) = (t+1, t)$. (b) $\tilde{f}(t) = (2t, 3t+1)$.

問題 2. (a) $\tilde{f}(t) = \pm(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0)$. (b) $\tilde{f}(t) = \pm(\cos \pi t, \sin \pi t, 0)$.

問題 3. 各点 $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ に対して, $c_{\tilde{x}} : [0,1] \to \tilde{X}$ を定値写像 $c_{\tilde{x}}(t) = \tilde{x}$ によって定める．すると, これは $pc_{\tilde{x}} = c$ を満たすので, c の持ち上げになっている．従って, c の任意の持ち上げ $\tilde{c}$ は, $c_{\tilde{x}}$, $(\tilde{x} \in p^{-1}(x))$ のいずれかに一致することが示せればよい．$\tilde{c}$ が c の持ち上げであれば, $\tilde{c}(0) \in p^{-1}(x)$ である．よって c の二つの持ち上げ $\tilde{c}$ と $c_{\tilde{c}(0)}$ は, $\tilde{c}(0) = c_{\tilde{c}(0)}(0)$ を満たしている．持ち上げの一意性より, $\tilde{c} = c_{\tilde{c}(0)}$ である．

問題 4. 被覆 $p : \tilde{X} \to X$ に関しての, 連続写像 $p : \tilde{X} \to X$ の持ち上げ $\tilde{p} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ は, $p\tilde{p} = p$ を満たすような連続写像のことである．すると φ は $p : \tilde{X} \to X$ の持ち上げである．また, $\tilde{X}$ の恒等写像 $\mathrm{id}_{\tilde{X}}$ も $p : \tilde{X} \to X$ の持ち上げである．これら二つの持ち上げは $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x} = \mathrm{id}_{\tilde{X}}(\tilde{x})$ を満たす．持ち上げの一意性より, $\varphi = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ である．

問題 5.

(a) $\tilde{X}$ が弧状連結なので, 各点 $\tilde{x} \in p^{-1}(p(\tilde{x}_0))$ に対して, $\tilde{x}_0$ から $\tilde{x}$ への道 $\tilde{f} : [0,1] \to \tilde{X}$ がとれる．すると, $p\tilde{f} : [0,1] \to X$ は, $p\tilde{f}(0) = p(\tilde{x}_0) = p\tilde{f}(1)$ を満たす道なので, 基本群の要素 $[p\tilde{f}] \in \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$ を定める．$\tilde{f}$ は道 $p\tilde{f}$ の持ち上げであって, $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ を満たす．従って, $\varphi([p\tilde{f}]) = \tilde{f}(1) = x$ となり, φ が全射であることが示せた．

(b) $\tilde{X}$ が単連結であるとは, 弧状連結かつ $\pi_1(\tilde{X}) \cong \{1\}$ となることであった．(a) によって φ が全射であることはわかっているので, 単射であることを以下で示すことにする．すなわち, $p(\tilde{x}_0)$ を基点とする X の二つの道 f, f' が $\varphi([f]) = \varphi([f'])$ を満たすならば, $[f] = [f]'$ であることを示せばよい．φ の定義から, f と f' それぞれの持ち上げ $\tilde{f}$ と $\tilde{f}'$ であって $\tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0) = \tilde{x}_0$ を満たすものは, $\tilde{f}(1) = \tilde{f}'(1)$ も満たしている．道 $\tilde{f} * \overline{\tilde{f}'}$ は $\tilde{x}_0$ を基点とする $\tilde{X}$ の道である．$\pi_1(\tilde{X}) \cong \{1\}$ なので, $\tilde{f} * \overline{\tilde{f}'}$ は $\tilde{x}_0$ における定値写像 $\tilde{c} : [0,1] \to \tilde{X}$ に同値である: $\tilde{f} * \overline{\tilde{f}'} \sim \tilde{c}$. すると, X における道の同値 $p(\tilde{f} * \overline{\tilde{f}'}) \sim p\tilde{c}$ が得られる．$p(\tilde{f} * \overline{\tilde{f}'}) = p\tilde{f} * p\overline{\tilde{f}'} = f * \overline{f'}$ が成り立ち, $p\tilde{c}$ は $p(\tilde{x}_0)$ における定値写像であるので, $[f][f']^{-1} = 1$ が $\pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$ の中で成り立つ．すなわち $[f] = [f']$ である．

(c) (b) の証明の議論から, $[f], [f'] \in \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$ が $\varphi([f]) = \varphi[f'])$ を満たすときには, $p([\tilde{g}])[f'] = [f]$ が成り立っている．ここで, $[g] \in \pi_1(X, \tilde{x}_0)$ は $\tilde{g} = \tilde{f} * \overline{\tilde{f}'}$ が代表する要素である．これは, φ が単射写像 $p_*(\pi_1(X, \tilde{x}_0)) \backslash \pi_1(\tilde{X}, p(\tilde{x}_0)) \cong p^{-1}(p(\tilde{x}_0))$ を誘導することを意味する．この単射が全射であることは, (a) の帰結である．

問題 6. 被覆 $p : \mathbb{R} \to S^1$, $(p(t) = \exp 2\pi t)$ に問題 5 の結果を適用する: 基点 $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}$ として $\tilde{x}_0 = 0$ を選ぶ．すると, $p^{-1}(p(\tilde{x}_0)) = \mathbb{Z}$ である．$\mathbb{R}$ は単連結なので, 問題 5 より全単射 $\varphi : \pi_1(S^1, p(0)) \to \mathbb{Z}$ が得られる．(S^1 は弧状連結なので, 基本群の基点はどこを選んでもよい.)

問題 7. $\tilde{x}_0$ を基点とする $\tilde{X}$ の道 $\tilde{f}$ を考える．$p\tilde{f}$ が $p(\tilde{x}_0$ における定値写像と同値であれば, $\tilde{f}$ が $\tilde{x}_0$ における定値写像と同値であることが言えれば良い．前者の同値を与えるホモトピー $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ に対して, $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$ となる持ち上げが必ず存在する．この持ち上げ $\tilde{F}$ が, $\tilde{f}$ と $\tilde{x}_0$ における定値写像との同値を与えるホモトピーを与えている．