トポロジー 演習問題 (2015 年 7 月 15 日)

問題 1. n 行 n 列の複素数係数行列 $M(n,\mathbb{C})$ の部分集合 $U(n)$ と $SU(n)$ を

$$U(n)=\{U\in M(n,\mathbb{C})|\ UU^*=E\},\qquad SU(n)=\{U\in U(n)|\ \det U=1\},$$

で定める. ただし, $U^*={}^t\overline{U}$ は U の共役行列で, E は単位行列である.

(a) $U(n)$ と $SU(n)$ は行列の積によって群になることを示せ.

(b) 3 次元球面 $S^3=\{(x_0,x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^4|\ \sum_{i=0}^3 x_i^2=1\}$ と $SU(2)$ の間に全単射があることを示せ. (ヒント: 任意の $U\in SU(2)$ は二つの複素数 u,v を用いて記述することができる.)

(c) 単射準同型 $U(1)\to SU(2)$ の例を構成せよ. (ヒント: 対角行列を考える.)

問題 2. 群 G とその部分群 $H\subset G$ が与えられたとき, H の G への作用 $H\times G\to G$ を $(h,g)\mapsto hg$ で定める. この作用は自由であることを示せ.

問題 3. 自然数 n に対し, 位数 n の巡回群を $\mathbb{Z}_n=\langle C|\ C^n\rangle$ と書く.

(a) 単射準同型 $\mathbb{Z}_n\to SU(2)$ の例を構成せよ.

(b) 基本群が $\mathbb{Z}_n$ に同型であるような位相空間 X_n の例を構成せよ.

(c) 基本群が $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ に同型であるような位相空間 $X_{m,n}$ の例を構成せよ. (ヒント: 直積空間の基本群についての公式.)

問題 4. 整数 $n\geq 0$ に対し, 群 G_n を以下で定める:

$$G_n=\langle\epsilon,C,\sigma|\ \epsilon^2,C\epsilon C^{-1}\epsilon^{-1},\sigma\epsilon\sigma^{-1}\epsilon^{-1},C^{2n+1},\sigma^2\epsilon^{-1},\sigma C\sigma C\epsilon^{-1}\rangle.$$

(a) G_n の位数は $8n+4$ であることを示せ.

(b) 単射準同型 $G_n\to SU(2)$ の例を構成せよ. (ヒント: G_n には部分群として $\mathbb{Z}_{4n+2}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{2n+1}$ が含まれている.)

(c) 基本群が G_n に同型であるような位相空間 X_n の例を構成せよ.

以上.

---

http://math.shinshu-u.ac.jp/~kgomi/class/index.html.

解答例

問題 1.

(a) $U, V \in U(n)$ に対して $(UV)(UV)^* = UVV^*U^* = UU^* = E$ が成り立つので, 積 $U(n) \times U(n) \to U(n)$ が定義されている. 行列の積の性質から, 任意の $U, V, W \in U(n)$ に対して, $(UV)W = U(VW)$ が成り立つ. また, 単位行列 E は $U(n)$ の要素であり, 任意の $U \in U(n)$ に対してその逆行列 $U^{-1} = U^*$ も $U(n)$ の要素である. すなわち, E を単位元とし, U^{-1} を U の逆元として, $U(n)$ は群の公理を満たしている.

一方で, $SU(n)$ が群であることを示すために, 行列式 $\det : U(n) \to U(1)$ は群の準同型であることを思い出す. $SU(n)$ はこの準同型の核と一致するので, $U(n)$ の部分群として, たしかに群である.

(b) 任意の $U \in SU(2)$ は, $|u|^2 + |v|^2 = 1$ を満たす複素数 $u, v \in \mathbb{C}$ によって, $U = \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}$ の形に書ける. 従って,

$$S^3 \to SU(2), \qquad (x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & -x_2 + ix_3 \\ x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}$$

という写像は S^3 から $SU(2)$ への全単射である.

(c) $U(1) \to SU(2)$ を $u \mapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix}$ で定めると, これは単射準同型になっていることが確かめられる.

問題 2. 任意の $g \in G$ と $h \in H$, $h \neq 1$ に対して, $hg \neq g$ が成り立っているから, H の G への作用は自由である.

問題 3.

(a) 例えば $C \mapsto \begin{pmatrix} e^{2\pi i/n} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/n} \end{pmatrix}$ は単射準同型の例である.

(b) (a) の単射により, $\mathbb{Z}_n$ を $SU(2)$ の部分群とみなす. また, 問題 1(b) により, $SU(2)$ を Hausdorff 位相空間 S^3 とみなす. すると, 問題 2 より, 群 $\mathbb{Z}_n$ は Hausdorff 位相空間 $SU(2)$ に自由に作用する. この作用から, 被覆 $p : SU(2) \to SU(2)/\mathbb{Z}_n$ が定義される. $SU(2) \approx S^3$ の基本群は自明なので, 同型 $\mathbb{Z}_n \cong \pi_1(SU(2)/\mathbb{Z}_n)/p_*(\pi_1(SU(2))) \cong \pi_1(SU(2)/\mathbb{Z}_n)$ が得られる. すなわち, $SU(2)/\mathbb{Z}_n$ は X_n の例である.

(c) 基本群の性質より, $(SU(2)/\mathbb{Z}_m) \times (SU(2)/\mathbb{Z}_n)$ は $X_{m,n}$ の例である.

問題 4.

(a) G_n の関係式より, G_n の任意の要素は, $8n+4$ 個の互いに異なる要素 $\epsilon^a \sigma^b C^k$, $(a = 0, 1,\ b = 0, 1,\ k = 0, 1, \ldots, 2n)$ のいずれかに書き直せる.

(b) 例えば, G_n の生成元に, $SU(2)$ の行列を以下のように対応づける:

$$\epsilon \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C \mapsto \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{2n+1}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{2n+1}} \end{pmatrix}, \qquad \sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

これより準同型 $\psi : G_n \to SU(2)$ が得られる. $a = 0, 1$, $b = 0, 1$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$ に対して, $\psi(\epsilon^a \sigma^b C^k) = E$ となるのは, $a = b = k = 0$ のときに限るので, ψ は単射である.

(c) (a) と (b) により, G_n を $SU(2)$ の部分群とみなす. 従って, 有限群 G_n が Hausdorff 位相空間 $SU(2) \approx S^3$ に自由に作用する. この作用から, 被覆 $p : SU(2) \to SU(2)/G_n$ が誘導される. $SU(2)$ の基本群は自明だったので, 同型 $G_n \cong \pi_1(SU(2)/G_n)/p_*(\pi_1(SU(2))) \cong \pi_1(SU(2)/G_n)$ が得られる. すなわち, $SU(2)/G_n$ は X_n の例である.