

トポロジー 演習問題 (2015 年 7 月 22 日)

問題 1. $\epsilon \in \mathbb{R}$ および $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ に対し, $S^1 = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| = 1\}$ 上の被覆を次のように定める:

$$\begin{aligned} p_\epsilon : \mathbb{R} &\rightarrow S^1, & p_\epsilon(x) &= \exp 2\pi i(x + \epsilon), \\ p_k : S^1 &\rightarrow S^1, & p_k(u) &= u^k. \end{aligned}$$

(a) 被覆 $p_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ と $p_0 : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ の間の同値を構成せよ.

(b) 被覆 $p_k : S^1 \rightarrow S^1$ と $p_{-k} : S^1 \rightarrow S^1$ の間の同値を構成せよ.

問題 2. 被覆 $p : \tilde{X} \rightarrow X$ であって, \tilde{X} が弧状連結なものが与えられたとする. また, $x_0 \in X$ をある点とし, 点 $\tilde{x}_0, \tilde{x}'_0 \in p^{-1}(x_0)$ が与えられたとする. このとき, \tilde{X} の基本群の p_* による像:

$$p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)), p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$$

は共役な部分群であることを示せ.

問題 3. $i = 1, 2$ に対して, 被覆 $p_i : \tilde{X}_i \rightarrow X$ であって, \tilde{X}_i が弧状連結なものが与えられたとする. また, $x_0 \in X$ をある点とし, $i = 1, 2$ に対して点 $\tilde{x}_i \in p_i^{-1}(x_0)$ が与えられたとする. このとき, \tilde{X}_i の基本群の p_{i*} による像:

$$p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)), p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)) \subset \pi_1(X, x_0)$$

は共役な部分群であることを示せ. (ヒント: 問題 2 を使う.)

問題 4. X は連結, 局所弧状連結かつ半局所単連結な位相空間とする.

(a) $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_2$ のとき, X 上の弧状連結な被覆 $p : \tilde{X} \rightarrow X$ の同値類の個数を答えよ.

(b) $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_3$ のとき, X 上の弧状連結な被覆 $p : \tilde{X} \rightarrow X$ の同値類の個数を答えよ.

(c) $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_4$ のとき, X 上の弧状連結な被覆 $p : \tilde{X} \rightarrow X$ の同値類の個数を答えよ.

(d) $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ のとき, X 上の弧状連結な被覆 $p : \tilde{X} \rightarrow X$ の同値類の個数を答えよ.

(e) $\pi_1(X)$ が 3 次の対称群 S_3 に同型なとき, X 上の弧状連結な被覆 $p : \tilde{X} \rightarrow X$ の同値類の個数を答えよ.

以上.

解答例

問題 1.

- (a) 写像 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $h(x) = x + \epsilon$ によって定める. これは明らかに同相写像で, $p \circ h = p_\epsilon$ が成り立つので, 被覆の同値である. (h^{-1} も正しい答えである.)
- (b) 写像 $h: S^1 \rightarrow S^1$ を $h(u) = u^{-1}$ によって定める. これは明らかに同相写像で, $p_k \circ h = p_{-k}$ が成り立つので, 被覆の同値である.

問題 2. \tilde{X} は弧状連結なので, \tilde{x}_0 から \tilde{x}'_0 への道 $\tilde{g}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ が存在する. $p \circ \tilde{g}: [0, 1] \rightarrow X$ は, x_0 を基点とする X 内の閉じた道である. $\gamma = [p \circ \tilde{g}] \in \pi_1(X, x_0)$ とおく. さて, 任意の $\eta' \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0))$ は, ある $[\tilde{f}'] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0)$ を用いて, $\eta' = p_*[\tilde{f}']$ と書ける. このとき, $(\tilde{g} * \tilde{f}') * \tilde{g}$ は \tilde{X} 内の \tilde{x}_0 を基点とする閉じた道である. $\eta = p_*[(\tilde{g} * \tilde{f}') * \tilde{g}] \in \pi_1(X, x_0)$ とおくと, 次が成り立つ:

$$\gamma\eta\gamma^{-1} = [p \circ \tilde{g}][p \circ \tilde{g}][p \circ \tilde{f}'] [p \circ \tilde{g}]^{-1} = [p \circ \tilde{f}'] = \eta'.$$

すなわち, 部分群 $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)), p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0))$ は共役である.

問題 3. 仮定より, 同相写像 $h: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ で $p_2 \circ h = p_1$ を満たすものが存在する. h は同相なので, 同型写像 $h_*: \pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow \pi_1(\tilde{X}_2, h(\tilde{x}_1))$ が誘導され, 特に, $h_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = \pi_1(\tilde{X}_2, h(\tilde{x}_1))$ である. また, $p_2 \circ h = p_1$ なので, $\pi_1(X, x_0)$ の部分群として,

$$p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(h_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))) = p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, h(\tilde{x}_1)))$$

が成り立つ. $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_0)$ だったので, $h(\tilde{x}_1) \in p_2^{-1}(x_0)$ が成り立つ. 従って, 問題 2 の結果より, $p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, h(\tilde{x}_1)))$ と $p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ は $\pi_1(X, x_0)$ の部分群として共役である. すなわち, $p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))$ と $p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ も共役である.

問題 4. 仮定のもとでは, X 上の被覆 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ であって \tilde{X} が弧状連結になるものの同値類の個数は, $\pi_1(X)$ の部分群の共役類の個数と一致する. 特に, $\pi_1(X)$ が可換群であれば, 部分群の共役類の個数と, 部分群の個数は一致する.

- (a) \mathbb{Z}_2 は可換群なので, その部分群の個数を答えればよい. \mathbb{Z}_2 の部分群は $\{1\}$ と \mathbb{Z}_2 しかないので, 答えは 2 個である.
- (b) 可換群 \mathbb{Z}_3 の部分群は $\{1\}$ と \mathbb{Z}_3 しかないので, 答えは 2 個である.
- (c) 可換群 $\mathbb{Z}_4 = \{\pm 1, \pm i\}$ の部分群は, $\{1\}, \{\pm 1\}$ および \mathbb{Z}_4 のみであるので, 答えは 3 個である.
- (d) 可換群 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\pm 1, \pm 1)\}$ の部分群は, $\{(1, 1)\}, \{(1, \pm 1)\}, \{(\pm 1, 1)\}, \{(\pm 1, \pm 1)\}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ のみであるので, 答えは 5 個である.
- (e) S_3 の部分群は, 全部で 6 個ある:

$$\{1\}, \{(1), (12)\}, \{(1), (23)\}, \{(1), (13)\}, \{(1), (123), (132)\}, S_3.$$

このうち, 位数 2 の部分群 3 個は, 互いに共役な部分群であることが確認できる. 従って, S_3 の部分群の共役類の個数は 4 個であり, 答えは 4 個である.