

幾何学特別講義 III/トポロジー演習 レポート問題

注意:

- 締め切り: 2015 年 8 月 7 日 (金)
- 提出場所: 理学部 A 棟 5 階 519
(ドア手前の封筒に提出する際, チェック表に提出時刻を記入すること.)
- 様式: A4 レポート用紙 1 枚にまとめること. 名前と学籍番号を必ず書くこと.

問題 1. n を自然数とする.

- [1] 以下の二つの位相空間は, ホモトピー同値であることを示せ.

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)\},$$

$$S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}.$$

いずれの位相空間も, 標準的な位相をもつ \mathbb{R}^{n+1} の部分集合としての位相を考える.

- [2] $n \geq 2$ のとき, \mathbb{R}^{n+1} と \mathbb{R}^2 は同相ではないことを示せ.

問題 2. $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ を位数 2 の巡回群とし, S^2 への作用を

$$\mathbb{Z}_2 \times S^2 \rightarrow S^2, \quad (\pm 1, x_0, x_1, x_2) \mapsto \pm(x_0, x_1, x_2)$$

によって定める. この群作用による商空間を $\mathbb{R}P^2 = S^2/\mathbb{Z}_2$ とする.

- [1] $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ の基本群を求めよ. (同型になる群を答えよ.)
- [2] 群の準同型 $\psi: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}$ は $\psi(\pm 1) = 0$ で与えられるものしかないことを示せ.
- [3] 連続写像 $\varphi: \mathbb{R}P^2 \rightarrow S^1$ および点 $x_0 \in \mathbb{R}P^2$ が与えられたとする. また, 連続写像 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}P^2$ であって $f(0) = f(1) = x_0$ を満たすものが任意に与えられたとする. このとき, $\varphi \circ f: [0, 1] \rightarrow S^1$ は $\varphi(x_0)$ における定値写像 $c: [0, 1] \rightarrow S^1, (c(t) = \varphi(x_0))$ にホモトピックであることを示せ.

以上.