

トポロジー 演習問題 (2016 年 4 月 13 日)

問題 1. 以下の (1)–(5) で与える連続写像 f_0 から f_1 へのホモトピーの例を書け. ただし, S^1 と $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ は次のように定める:

$$S^1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

(1)

$$f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} f_0(x) = (0, 0), \\ f_1(x) = (x, 0). \end{cases}$$

(2)

$$f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} f_0(x, y) = (0, 0), \\ f_1(x, y) = (x, y). \end{cases}$$

(3)

$$f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} f_0(x) = (0, 0), \\ f_1(x) = (\cos x, \sin x). \end{cases}$$

(4)

$$f_i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \begin{cases} f_0(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \theta, \sin \theta), \\ f_1(\cos \theta, \sin \theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta). \end{cases}$$

(5)

$$f_i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \begin{cases} f_0(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \theta, \sin \theta), \\ f_1(\cos \theta, \sin \theta) = (e^{\cos \theta} \cos \theta, e^{\cos \theta} \sin \theta). \end{cases}$$

(6)

$$f_i : S^1 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f_0(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \\ f_1(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1). \end{cases}$$

(7)

$$f_i : S^1 \rightarrow S^1 \times S^1, \quad \begin{cases} f_0(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1, 0), \\ f_1(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, -1, 0). \end{cases}$$

(8)

$$f_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} f_0(x) = (x + 1, 0), \\ f_1(x) = (x - 1, x). \end{cases}$$

(9)

$$f_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} f_0(x) = (\cos \pi x, \sin \pi x), \\ f_1(x) = (\cos \pi x, -\sin \pi x). \end{cases}$$

(10)

$$f_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \begin{cases} f_0(x) = (\cos \pi x, \sin \pi x), \\ f_1(x) = (\cos \pi(x + 1), \sin \pi(x + 1)). \end{cases}$$

問題 2. 以下の (1)–(5) で与える連続写像 f_0 から f_1 へのホモトピーであって, A を動かさないものの例を書け.

(1)

$$f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad A = \{0\}, \quad \begin{cases} f_0(x) = (0, 0), \\ f_1(x) = (x, 0). \end{cases}$$

(2)

$$f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad A = \{(0, 0)\}, \quad \begin{cases} f_0(x, y) = (0, 0), \\ f_1(x, y) = (x, y). \end{cases}$$

(3)

$$f_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad A = \{0, 1\}, \quad \begin{cases} f_0(x) = (\cos \pi x, \sin \pi x), \\ f_1(x) = (\cos \pi x, -\sin \pi x). \end{cases}$$

問題 3. 以下を証明せよ.

- (a) 位相空間 X がコンパクトであるとき, X の閉部分空間はコンパクトである.
- (b) 位相空間 X から Y への連続写像 $f : X \rightarrow Y$ が与えられたとする. X がコンパクトならば, 像 $f(X)$ もコンパクトである.
- (c) Hausdorff 位相空間 Y のコンパクトな部分空間 $C \subset Y$ は閉集合である.
- (d) コンパクト位相空間 X から Hausdorff 位相空間 Y への連続な全単射 $f : X \rightarrow Y$ は同相写像である. (ヒント: 上の (a), (b), (c) を組み合わせる.)
- (e) 区間 $[0, 1]$ の同値関係 \sim を以下で定める:

$$t \sim t' \Leftrightarrow \begin{cases} t = t', \text{ または,} \\ t = 0 \text{ かつ } t' = 1, \text{ または,} \\ t = 1 \text{ かつ } t' = 0. \end{cases}$$

商空間 $[0, 1]/\sim$ に $[0, 1]$ からの商位相を入れたものは,

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

と同相である. (ヒント: (d) を使う.)

問題 4. X, Y, Z を位相空間とし, $A \subset X$ を部分空間とする. 以下を証明せよ.

- (a) 連続写像 $f_i : X \rightarrow Y$, ($i = 0, 1$) と $g : Y \rightarrow Z$ が与えられたとする. f_0 と f_1 が A を動かさずにホモトピックならば, $g \circ f_0$ と $g \circ f_1$ は A を動かさずにホモトピックである.
- (b) 連続写像 $f : X \rightarrow Y$ と $g_i : Y \rightarrow Z$, ($i = 0, 1$) が与えられとする. g_0 と g_1 が $f(A)$ を動かさずにホモトピックならば, $g_0 \circ f$ と $g_1 \circ f$ は A を動かさずにホモトピックである.
- (c) 連続写像 $f_i : X \rightarrow Y$ と $g_i : Y \rightarrow Z$ が与えられたとする. ($i = 0, 1$.) f_0 と f_1 がホモトピックであり, g_0 と g_1 がホモトピックであるとき, $g_0 \circ f_0$ と $g_1 \circ f_1$ はホモトピックである.

以上.

解答

問題 1. 以下はホモトピーの例である.

- (1) $F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, t) = (tx, 0)$,
- (2) $F : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y, t) = (tx, ty)$,
- (3) $F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, t) = (t \cos x, t \sin x)$,
- (4) $F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $F(\cos \theta, \sin \theta) = ((t+1) \cos \theta, (t+1) \sin \theta)$,
- (5) $F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $F(\cos \theta, \sin \theta) = (e^{t \cos \theta} \cos \theta, e^{t \cos \theta} \sin \theta)$,
- (6) $F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$, $F(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, t)$,
- (7) $F : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times S^1$, $F(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, \cos \pi t, \sin \pi t)$,
- (8) $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, t) = (x+1-2t, tx)$,
- (9) $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, t) = (\cos \pi x, (1-2t) \sin \pi x)$,
- (10) $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $F(x, t) = (\cos \pi(x+t), \sin \pi(x+t))$.

問題 2. 以下はホモトピーの例である.

- (1) $F : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, t) = (tx, 0)$,
- (2) $F : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y, t) = (tx, ty)$,
- (3) $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, t) = (\cos \pi x, (1-2t) \sin \pi x)$.

問題 3.

- (a) $C \subset X$ を閉部分空間とし, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ をその開被覆とすると, ある有限部分集合 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset A$ が存在して, $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1, \dots, n}$ が C の開被覆となることを示せば良い. 各 $\alpha \in A$ に対して, $U_\alpha \subset C$ は開集合なので, ある開集合 \tilde{U}_α を用いて $U_\alpha = \tilde{U}_\alpha \cap C$ と書くことができる. $\{\tilde{U}_\alpha, X \setminus C\}$ は X の開被覆である. X がコンパクトであるので, ある有限部分集合 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset A$ が存在して, $\{\tilde{U}_{\alpha_i}, X \setminus C\}_{i=1, \dots, n}$ は X の開被覆である. すると,

$$C = C \cap X = C \cap \left\{ (X \setminus C) \cup \bigcup_{i=1}^n \tilde{U}_{\alpha_i} \right\} = \bigcup_{i=1}^n C \cap \tilde{U}_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$$

となるので, $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1, \dots, n}$ は C の開被覆である.

- (b) $f(X)$ の開被覆 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとき, 有限部分集合 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset A$ が存在して, $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1, \dots, n}$ が $f(X)$ の開被覆になることを示す. $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ は X の開被覆である. X がコンパクトなので, ある有限部分集合 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset A$ が存在して, $\{f^{-1}(V_{\alpha_i})\}_{i=1, \dots, n}$ は X の開被覆となる. すると,

$$f(X) = f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_{\alpha_i})\right) = \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(V_{\alpha_i})) = \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$$

となるので, $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1, \dots, n}$ は $f(X)$ の開被覆である.

- (c) C が閉集合であるということは, $Y \setminus C$ が Y の開集合であるということである. $Y \setminus C$ が Y の開集合であるということは, 任意の点 $y \in Y \setminus C$ に対して, $y \in U \subset Y \setminus C$ となる開集合 U が存在するということであり, これを示す. $C = \emptyset$ または $C = Y$ の場合には明らかに C は閉集合なので, $C \neq \emptyset, Y$ と仮定する. Y が Hausdorff であるので, 任意の点 $c \in C \subset Y$ に対して, ある開集合 $V_c, U_c \subset Y$ であって, $c \in V_c, y \in U_c, U_c \cap V_c = \emptyset$ となるものが存在する. $\{V_c\}_{c \in C}$ は C の開被覆であり, C はコンパクトである. 従って, ある有限

集合 $\{c_1, \dots, c_n\} \subset C$ であって, $\{V_{c_i}\}_{i=1, \dots, n}$ が C の開被覆となるものが存在する. 開集合 U を $U = U_{c_1} \cap \dots \cap U_{c_n}$ と定めると, $y \in U$ であり,

$$U \cap C \subset U \cap \bigcup_{i=1}^n V_{c_i} = \bigcup_{i=1}^n U \cap V_{c_i} \subset \bigcup_{i=1}^n U_{c_i} \cap V_{c_i} = \emptyset$$

となるので, $U \subset Y \setminus C$ となる.

- (d) 任意の閉集合 $C \subset X$ に対して, $f(C) \subset Y$ が閉集合であることを示せば良い. X がコンパクトなので, (a) より C もコンパクトである. すると (b) より $f(C)$ もコンパクトである. Y は Hausdorff なので, (c) より $f(C)$ は閉集合である.
- (e) 写像 $f: [0, 1]/\sim \rightarrow S^1$ を $f([t]) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ で定める. $[0, 1]/\sim$ の位相は $[0, 1]$ の位相から誘導され, $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ の位相は \mathbb{R}^2 から誘導されていることに注意すると, f が連続であることは, 合成写像

$$\begin{array}{ccccccc} [0, 1] & \rightarrow & [0, 1]/\sim & \rightarrow & S^1 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & [t] & \mapsto & f([t]) & \mapsto & f([t]) \end{array}$$

が連続であることから従う. この合成写像 $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ は $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ と表示でき, 連続であることがわかるので, f は連続である. また, f は全単射であることは, すぐに確認できる. $[0, 1]$ がコンパクトであることから, $[0, 1]/\sim$ もコンパクトであることがわかる. \mathbb{R}^2 は Hausdorff なので, $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ も Hausdorff である. よって (e) より, f は同相写像である.

問題 3.

- (a) $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ が f_0 から f_1 への A を動かさないホモトピーであるならば, $g \circ F: X \times [0, 1] \rightarrow Z$ は $g \circ f_0$ から $g \circ f_1$ への A を動かさないホモトピーを与える.
- (b) $G: Y \times [0, 1] \rightarrow Z$ が g_0 から g_1 への $f(A)$ を動かさないホモトピーであるならば, $F(x, t) = G(f(x), t)$ によって定めた写像 $F: X \times [0, 1] \rightarrow Z$ は $g_0 \circ f$ から $g_1 \circ f$ への A を動かさないホモトピーを与える.
- (c) $A = \emptyset$ として (a) を用いることで, $f_0 \simeq f_1$ より $g_0 \circ f_0 \simeq g_0 \circ f_1$ である. 同様に (b) を用いることで, $g_0 \simeq g_1$ より $g_0 \circ f_1 \simeq g_1 \circ f_1$ である. ホモトピックであるという関係 \simeq は同値関係であるので, $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ g_1$ である.