

トポロジー 演習問題 (2016 年 4 月 20 日)

以下, $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ とする.

問題 1. 位相空間の間のホモトピー同値が, 同値関係であることを証明せよ.

問題 2. 以下の部分空間 $A \subset X$ が強変形レトラクトであることを, レトラクションを構成して示せ.

- (1) $A = \{(0, \dots, 0)\}, \quad X = \mathbb{R}^n.$
- (2) $A = \mathbb{R}^n \times \{0\}, \quad X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$
- (3) $A = \{\pm 1\}, \quad X = \mathbb{R} - \{0\}.$
- (4) $A = S^n, \quad X = \mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}.$
- (5) $A = \{(0, 0)\} \quad X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 \leq 1\}.$
- (6) $A = S^1, \quad X = S^1 \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2\}.$
- (7) $A = \mathbb{R} \times \{0\} / \sim, \quad X = \mathbb{R} \times [-1, 1] / \sim.$

ただし, (7) における同値関係 \sim は以下で定義する:

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x \in \mathbb{Z}, \\ y' = (-1)^{x' - x} y. \end{cases}$$

問題 3. X を位相空間, Y を \mathbb{R}^n の部分空間とし, $f, g: X \rightarrow Y$ を連続写像とする.

- (a) 各点 $x \in X$ に対して, $f(x)$ と $g(x)$ を結ぶ線分が Y に含まれるとする. このとき, f と g はホモトピックであることを示せ.
- (b) 任意の連続写像 $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ はホモトピックであることを示せ.

問題 4. X を任意の位相空間とし, 連続写像 $f, g: X \rightarrow S^n$ は, 任意の $x \in X$ に対して $f(x) \neq -g(x)$ を満たすとする.

- (a) 任意の $x \in X$ と $t \in [0, 1]$ に対し, $\|(1-t)f(x) + tg(x)\| \neq 0$ を示せ. ただし, $v = (v_1, \dots, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して, $\|v\|$ は次で定める.

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_{n+1}^2}$$

(ヒント: 任意の $v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対し $\|v - w\| \geq \left| \|v\| - \|w\| \right|$ が成り立つ.)

- (b) f と g はホモトピックであることを示せ.

以上.

解答例

問題 1. 対称律の証明だけ与える: X と Y がホモトピー同値であるということは, 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow X$ であって, $g \circ f \simeq \text{id}_X$ と $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ を満たすものが存在することだった. 従って, 連続写像 $g: Y \rightarrow X$ と $f: X \rightarrow Y$ であって, $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ と $g \circ f \simeq \text{id}_X$ を満たすものが存在する. すなわち, Y と X はホモトピー同値である.

問題 2. 包含写像を $i: A \rightarrow X$ とする. レトラクション $r: X \rightarrow A$ と, $i \circ r \simeq_A \text{id}_X$ を与えるホモトピー $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ の例は以下のとおりである.

- (1) $r(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0), \quad H(x_1, \dots, x_n, t) = (tx_1, \dots, tx_n).$
 (2) $r(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n), \quad H(x_1, \dots, x_{n+1}, t) = (x_1, \dots, x_n, tx_{n+1}).$
 (3) $r(x) = \frac{x}{|x|}, \quad H(x, t) = \frac{x}{|x|^t}.$
 (4) $r(x) = \frac{x}{\|x\|}, \quad H(x, t) = \frac{x}{\|x\|^t}.$
 (5) $r(x, y) = (0, 0), \quad H(x, y, t) = (tx, ty).$
 (6) $r(x, y) = \begin{cases} (x, y), & ((x, y) \in S^1) \\ (1, 0), & ((x, 0) \in \overline{X - S^1}). \end{cases} \quad H(x, y, t) = \begin{cases} (x, y), & ((x, y) \in S^1) \\ (t(x-1) + 1, 0), & ((x, 0) \in \overline{X - S^1}). \end{cases}$
 (7) $r([x, y]) = [x, 0], \quad H([x, y], t) = [x, ty].$

問題 3.

- (a) $f(x)$ と $g(x)$ を結ぶ線分が Y に含まれるということは, 任意の $x \in X$ と $t \in [0, 1]$ に対して, $(1-t)f(x) + tg(x) \in Y$ となることである. 従って, 次の連続写像が矛盾なく定義される.

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow Y, \quad H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

この H は f から g へのホモトピーである.

- (b) $Y = \mathbb{R}^n$ とすると, 任意の $f, g: X \rightarrow Y = \mathbb{R}^n$ に対して (a) の条件が成立する. 従って, f と g はホモトピックである.

問題 4.

- (a) $\| \cdot \|$ の性質と, $\|f(x)\| = \|g(x)\| = 1$ より次を得る:

$$\begin{aligned} \|(1-t)f(x) + tg(x)\| &\geq \left| \|(1-t)f(x)\| - \|tg(x)\| \right| \\ &= |(1-t)\|f(x)\| - t\|g(x)\|| = |(1-t) - t| = |1 - 2t|. \end{aligned}$$

従って, $t \neq 1/2$ であれば, $\|(1-t)f(x) + tg(x)\| \neq 0$ である. $t = 1/2$ のとき,

$$\|(1-t)f(x) + tg(x)\| = \frac{1}{2}\|f(x) + g(x)\|$$

となるので, 問題の仮定より, これも 0 ではない. (一般に $\|v\| = 0$ となるのは $v = 0$ のときに限る.)

- (b) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に注意すると, f と g の間のホモトピーを以下で与えることができる:

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow S^n, \quad H(x, t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|}.$$