トポロジー 演習問題 (2016 年 6 月 22 日)

問題 1. n 行 n 列の複素数係数行列 $M(n,\mathbb{C})$ の部分集合 $U(n)$ と $SU(n)$ を

$$U(n)=\{U\in M(n,\mathbb{C})|\ UU^*=E\},\qquad SU(n)=\{U\in U(n)|\ \det U=1\},$$

で定める. ただし, $U^*={}^t\overline{U}$ は U の共役行列で, E は単位行列である.

(a) $U(n)$ と $SU(n)$ は行列の積によって群になることを示せ.

(b) 3 次元球面 $S^3=\{(x_0,x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^4|\ \sum_{i=0}^3 x_i^2=1\}$ と $SU(2)$ の間に全単射があることを示せ. (ヒント: 任意の $U\in SU(2)$ は二つの複素数 u,v を用いて記述することができる.)

(c) 単射準同型 $U(1)\to SU(2)$ の例を構成せよ. (ヒント: 対角行列を考える.)

問題 2. 群 G とその部分群 $H\subset G$ が与えられたとき, H の G への作用 $H\times G\to G$ を $(h,g)\mapsto hg$ で定める. この作用は自由であることを示せ.

問題 3. 自然数 n に対し, 位数 n の巡回群を $\mathbb{Z}_n$ と書く.

(a) 単射準同型 $\mathbb{Z}_n\to SU(2)$ の例を構成せよ.

(b) 基本群が $\mathbb{Z}_n$ に同型であるような位相空間 X_n の例を構成せよ.

(c) 基本群が $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ に同型であるような位相空間 $X_{m,n}$ の例を構成せよ. (ヒント: 直積空間の基本群についての公式.)

問題 4. 以下で与える群 G の位相空間 X への作用 $G\times X\to X$ について, 商空間 X/G の $x_0\in X/G$ を基点とする基本群 $\pi_1(X/G,x_0)$ を求めよ.

(1) $G=\mathbb{Z}$, $X=\mathbb{R}$,

$$G\times X\to X,\quad (n,x)\mapsto n+x.\qquad\qquad x_0=[0].$$

(2) $G=\mathbb{Z}^2$, $X=\mathbb{R}^2$,

$$G\times X\to X,\quad (n_1,n_2,x_1,x_2)\mapsto(n_1+x_1,n_1+x_2).\qquad x_0=[(0,0)].$$

(3) $G=\mathbb{Z}_2=\{\pm1\}$, $X=S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ x^2+y^2+z^2=1\}$,

$$G\times X\to X,\quad (\pm1,(x,y,z))\mapsto\pm(x,y,z).\qquad x_0=[(1,0,0)].$$

(4) $G=\mathbb{Z}_3=\{e^{\frac{2\pi ik}{3}}\in\mathbb{C}|\ k\in\mathbb{Z}\}$, $X=S^3=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2|\ |z|^2+|w|^2=1\}$,

$$G\times X\to X,\quad (e^{\frac{2\pi ik}{3}},(z,w))\mapsto e^{\frac{2\pi ik}{3}}(z,w).\qquad x_0=[(1,0)].$$

(5) $G=\mathbb{Z}_2=\{\pm1\}$, $X=\mathbb{R}$,

$$G\times X\to X,\quad (\pm1,x)\mapsto\pm x.\qquad\qquad x_0=[0].$$

以上.

---

http://math.shinshu-u.ac.jp/~kgomi/class/index.html.

解答例

問題 1.

(a) $U, V \in U(n)$ に対して $(UV)(UV)^* = UVV^*U^* = UU^* = E$ が成り立つので, 積 $U(n) \times U(n) \to U(n)$ が定義されている. 行列の積の性質から, 任意の $U, V, W \in U(n)$ に対して, $(UV)W = U(VW)$ が成り立つ. また, 単位行列 E は $U(n)$ の要素であり, 任意の $U \in U(n)$ に対してその逆行列 $U^{-1} = U^*$ も $U(n)$ の要素である. すなわち, E を単位元とし, U^{-1} を U の逆元として, $U(n)$ は群の公理を満たしている.

　一方で, $SU(n)$ が群であることを示すために, 行列式 $\det : U(n) \to U(1)$ は群の準同型であることを思い出す. $SU(n)$ はこの準同型の核と一致するので, $U(n)$ の部分群として, たしかに群である.

(b) 任意の $U \in SU(2)$ は, $|u|^2 + |v|^2 = 1$ を満たす複素数 $u, v \in \mathbb{C}$ によって, $U = \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}$ の形に書ける. 従って,

$$S^3 \to SU(2), \qquad (x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & -x_2 + ix_3 \\ x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}$$

という写像は S^3 から $SU(2)$ への全単射である.

(c) $U(1) \to SU(2)$ を $u \mapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix}$ で定めると, これは単射準同型になっていることが確かめられる.

問題 2. 任意の $g \in G$ と $h \in H$, $h \neq 1$ に対して, $hg \neq g$ が成り立っているから, H の G への作用は自由である.

問題 3.

(a) 例えば巡回群 $\mathbb{Z}_n$ を $\mathbb{Z}_n = \{e^{2\pi ik/n} \in \mathbb{C} |\ k \in \mathbb{Z}\}$ と表すとき, $e^{2\pi ik/n} \mapsto \begin{pmatrix} e^{2\pi ik/n} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi ik/n} \end{pmatrix}$ は単射準同型の例である.

(b) (a) の単射により, $\mathbb{Z}_n$ を $SU(2)$ の部分群とみなす. また, 問題 1(b) により, $SU(2)$ を Hausdorff 位相空間 S^3 とみなす. すると, 問題 2 より, 群 $\mathbb{Z}_n$ は Hausdorff 位相空間 $SU(2)$ に自由に作用する. この作用から, 被覆 $p : SU(2) \to SU(2)/\mathbb{Z}_n$ が定義される. $SU(2) \approx S^3$ の基本群は自明なので, 同型 $\mathbb{Z}_n \cong \pi_1(SU(2)/\mathbb{Z}_n)/p_*(\pi_1(SU(2))) \cong \pi_1(SU(2)/\mathbb{Z}_n)$ が得られる. すなわち, $SU(2)/\mathbb{Z}_n$ は X_n の例である.

(c) 基本群の性質より, $(SU(2)/\mathbb{Z}_m) \times (SU(2)/\mathbb{Z}_n)$ は $X_{m,n}$ の例である.

問題 4.

(1) 群作用は真性不連続であるので, 自然な射影 $p : X \to X/G$ は被覆である. 被覆空間 $X = \mathbb{R}$ は弧状連結で, その基本群は自明であるので, $\pi_1(X/G, x_0) \cong G = \mathbb{Z}$ となる.

(2) (1) と同じ議論により, $\pi_1(X/G, x_0) \cong G = \mathbb{Z}^2$ である.

(3) (1) と同じ議論により, $\pi_1(X/G, x_0) \cong G = \mathbb{Z}_2$ である.

(4) (1) と同じ議論により, $\pi_1(X/G, x_0) \cong G = \mathbb{Z}_3$ である.

(5) 商空間 X/G は, 半直線 $[0, +\infty)$ と同相であり, 特に可縮である. 従って $\pi_1(G/X, x_0) = \{1\}$ である.