トポロジー 演習問題 (2016 年 6 月 29 日)

問題 1. $\epsilon \in \mathbb{R}$ および $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ に対し, $S^1 = \{u \in \mathbb{C} | \ |u| = 1\}$ 上の被覆を次のように定める:

$$p_\epsilon : \mathbb{R} \to S^1, \qquad p_\epsilon(x) = \exp 2\pi i(x+\epsilon),$$
$$p_k : S^1 \to S^1, \qquad p_k(u) = u^k.$$

(a) 被覆 $p_\epsilon : \mathbb{R} \to S^1$ と $p_0 : \mathbb{R} \to S^1$ の間の同値を構成せよ.

(b) 被覆 $p_k : S^1 \to S^1$ と $p_{-k} : S^1 \to S^1$ の間の同値を構成せよ.

問題 2. 被覆 $p : \tilde{X} \to X$ であって, $\tilde{X}$ が弧状連結なものが与えられたとする. また, $x_0 \in X$ をある点とし, 点 $\tilde{x}_0, \tilde{x}'_0 \in p^{-1}(x_0)$ が与えられたとする. このとき, $\tilde{X}$ の基本群の p_* による像:

$$p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)),\ p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$$

は共役な部分群であることを示せ.

問題 3. $i = 1, 2$ に対して, 被覆 $p_i : \tilde{X}_i \to X$ であって, $\tilde{X}_i$ が弧状連結なものが与えられたとする. また, $x_0 \in X$ をある点とし, $i = 1, 2$ に対して点 $\tilde{x}_i \in p_i^{-1}(x_0)$ が与えられたとする. このとき, $\tilde{X}_i$ の基本群の p_{i*} による像:

$$p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)),\ p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)) \subset \pi_1(X, x_0)$$

は共役な部分群であることを示せ. (ヒント: 問題 2 を使う.)

問題 4. X は連結, 局所弧状連結かつ半局所単連結な位相空間とする.

(a) $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_2$ のとき, X 上の弧状連結な被覆 $p : \tilde{X} \to X$ の同値類の個数を答えよ.

(b) $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_3$ のとき, X 上の弧状連結な被覆 $p : \tilde{X} \to X$ の同値類の個数を答えよ.

(c) $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_4$ のとき, X 上の弧状連結な被覆 $p : \tilde{X} \to X$ の同値類の個数を答えよ.

(d) $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ のとき, X 上の弧状連結な被覆 $p : \tilde{X} \to X$ の同値類の個数を答えよ.

(e) $\pi_1(X)$ が 3 次の対称群 S_3 に同型なとき, X 上の弧状連結な被覆 $p : \tilde{X} \to X$ の同値類の個数を答えよ.

以上.

---

http://math.shinshu-u.ac.jp/~kgomi/class/index.html.

解答例

問題 1.

(a) 写像 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $h(x)=x+\epsilon$ によって定める．これは明らかに同相写像で，$p_0\circ h=p_\epsilon$ が成り立つので，被覆の同値である．(h^{-1} も正しい答えである.)

(b) 写像 $h:S^1\to S^1$ を $h(u)=u^{-1}$ によって定める．これは明らかに同相写像で，$p_k\circ h=p_{-k}$ が成り立つので，被覆の同値である．

問題 2. $\tilde{X}$ は弧状連結なので，$\tilde{x}_0$ から $\tilde{x}_0'$ への道 $\tilde{g}:[0,1]\to\tilde{X}$ が存在する．$p\circ\tilde{g}:[0,1]\to X$ は，x_0 を基点とする X 内の閉じた道である．$\gamma=[p\circ\tilde{g}]\in\pi_1(X,x_0)$ とおく．さて，任意の $\eta'\in p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0'))$ は，ある $[\tilde{f}']\in\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0')$ を用いて，$\eta'=p_*[\tilde{f}']$ と書ける．このとき，$(\overline{\tilde{g}}*\tilde{f}')*\tilde{g}$ は $\tilde{X}$ 内の $\tilde{x}_0$ を基点とする閉じた道である．$\eta=p_*[(\overline{\tilde{g}}*\tilde{f}')*\tilde{g}]\in\pi_1(X,x_0)$ とおくと，次が成り立つ:

$$\gamma\eta\gamma^{-1}=[p\circ\tilde{g}][p\circ\overline{\tilde{g}}][p\circ\tilde{f}'][p\circ\tilde{g}][p\circ\overline{\tilde{g}}]=[p\circ\tilde{f}']=\eta'.$$

すなわち，部分群 $p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)),p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0'))$ は共役である．

問題 3. 仮定より，同相写像 $h:\tilde{X}_1\to\tilde{X}_2$ で $p_2\circ h=p_1$ を満たすものが存在する．h は同相なので，同型写像 $h_*:\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)\to\pi_1(\tilde{X}_2,h(\tilde{x}_1))$ が誘導され，特に，$h_*(\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1))=\pi_1(\tilde{X}_2,h(\tilde{x}_1))$ である．また，$p_2\circ h=p_1$ なので，$\pi_1(X,x_0)$ の部分群として，

$$p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1))=p_{2*}(h_*(\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)))=p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2,h(\tilde{x}_1)))$$

が成り立つ．$\tilde{x}_1\in p_1^{-1}(x_0)$ だったので，$h(\tilde{x}_1)\in p_2^{-1}(x_0)$ が成り立つ．従って，問題 2 の結果より，$p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2,h(\tilde{x}_1)))$ と $p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2))$ は $\pi_1(X,x_0)$ の部分群として共役である．すなわち，$p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1))$ と $p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2))$ も共役である．

問題 4. 仮定のもとでは，X 上の被覆 $p:\tilde{X}\to X$ であって $\tilde{X}$ が弧状連結になるものの同値類の個数は，$\pi_1(X)$ の部分群の共役類の個数と一致する．特に，$\pi_1(X)$ が可換群であれば，部分群の共役類の個数と，部分群の個数は一致する．

(a) $\mathbb{Z}_2$ は可換群なので，その部分群の個数を答えればよい．$\mathbb{Z}_2$ の部分群は $\{1\}$ と $\mathbb{Z}_2$ しかないので，答えは 2 個である．

(b) 可換群 $\mathbb{Z}_3$ の部分群は $\{1\}$ と $\mathbb{Z}_3$ しかないので，答えは 2 個である．

(c) 可換群 $\mathbb{Z}_4=\{\pm1,\pm i\}$ の部分群は，$\{1\}$，$\{\pm1\}$ および $\mathbb{Z}_4$ のみであるので，答えは 3 個である．

(d) 可換群 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2=\{(\pm1,\pm1)\}$ の部分群は，$\{(1,1)\}$，$\{(1,\pm1)\}$，$\{(\pm1,1)\}$，$\{\pm(1,1)\}$，$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ のみであるので，答えは 5 個である．

(e) S_3 の部分群は，全部で 6 個ある:

$$\{(1)\},\ \{(1),(12)\},\ \{(1),(23)\},\ \{(1),(13)\},\ \{(1),(123),(132)\},S_3.$$

このうち，位数 2 の部分群 3 個は，互いに共役な部分群であることが確認できる．従って，S_3 の部分群の共役類の個数は 4 個であり，答えは 4 個である．