

トポロジー 演習問題 (2016年7月20日)

- 問題 1. 単体複体  $K = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\}$  に対し,  $E(K, 0) \cong \mathbb{Z}$  を証明せよ. (ヒント: 0 を基点とする閉じた辺の道  $\zeta$  に対して,  $\zeta$  と同値な道  $\zeta'$  であって,  $\zeta'$  を構成する辺の個数が最小のものを考える.)
- 問題 2.  $n$  次元単体  $K$  の頂点  $v, v' \in V(K)$  が与えられたとする.  $K$  の辺の道  $\zeta$  であって  $v$  を始点とし  $v'$  を終点とするものは,  $(v, v')$  に同値であることを示せ. (ヒント: 辺の個数についての数学的帰納法.)
- 問題 3.  $n$  次元単体  $K$  に対し,  $E(K, v) = \{1\}$  を証明せよ.
- 問題 4. 単体複体  $K$  の頂点  $v, v' \in V(K)$  に対して,  $v$  を始点とし  $v'$  を終点とする辺の道  $\zeta$  があったとする. このとき,  $E(K, v)$  と  $E(K, v')$  は同型であることを示せ.
- 問題 5. 単体写像  $\varphi: K_1 \rightarrow K_2$  が与えられたとする.  $K_1$  の道
- $$\zeta = (v_0, v_1)(v_1, v_2) \cdots (v_{n-1}, v_n)$$
- に対して,  $K_2$  の道  $\varphi_*\zeta$  を
- $$\varphi_*\zeta = (\varphi(v_0), \varphi(v_1))(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) \cdots (\varphi(v_{n-1}), \varphi(v_n))$$
- で定める.
- (a) 写像  $\varphi_*: E(K_1, v) \rightarrow E(K_2, \varphi(v))$ , ( $[\zeta] \mapsto [\varphi_*\zeta]$ ) は矛盾なく定義された準同型であることを示せ.
- (b) 別の単体写像  $\psi: K_2 \rightarrow K_3$  が与えられたとき,  $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$  が成り立つことを示せ.

以上.

## 解答例

問題 1.  $0$  を基点とする  $K$  の閉じた辺の道  $\zeta$  が与えられたとする.  $\zeta$  と同値な道であって, それを構成する辺の個数が最小のものを  $\zeta'$  とする. 辺の道  $\eta$  と  $\eta^{-1}$  を  $\eta = (0, 1)(1, 2)(2, 0)$  および  $\eta^{-1} = (0, 2)(2, 1)(1, 0)$  で定める. このとき,  $\zeta'$  は,  $\zeta' = \eta^n$ , ( $n \in \mathbb{Z}$ ) という形をしていることが示せれば,  $[\zeta] = [\eta^n] \mapsto n$  によって同型写像  $E(K, 0) \rightarrow \mathbb{Z}$  が得られることになる. 以下,  $\zeta'$  がそのような形をしていることを示す: まず  $\zeta'$  の最初の辺は  $(0, v)$  という形をしている.

- (1) もし  $v = 0$  であれば,  $n = 0$  の場合である.
- (2) もし  $v = 1$  の場合には二番目の辺があり,  $\zeta' = (0, 1)(1, w)(w, w') \cdots$  という形をしている.  $w = 0, 1$  の場合には,  $\zeta' \sim (0, w)(w, w') \cdots$  となり  $\zeta'$  の辺の個数が最小であるという仮定に矛盾する. 従って  $w = 2$  である. これより  $\zeta'$  は三番目の辺を持ち,  $\zeta' = (0, 1)(1, 2)(2, x)(x, x') \cdots$  という形をしている. もし  $x = 1, 2$  であれば,  $\zeta'$  はより辺の個数が少ない辺の道に同値であり,  $\zeta'$  の仮定に矛盾する. 従って,  $x = 0$  であり,  $\zeta'$  のはじめの三つの辺は  $\eta$  になっていることがわかる. もし  $\zeta'$  に辺が三つしか含まれていなければ,  $n = 1$  の場合である. もし  $\zeta'$  に四つ以上の辺が含まれている場合, 上と同様の議論により,  $\zeta' = \eta(0, 1) \cdots$  という形でなければならない. 従って, 上の議論を繰り返すことができ,  $\zeta'$  の辺の個数は  $3$  の倍数で,  $3n$  個の辺が含まれている場合には,  $\zeta' = \eta^n$  の形であることがわかる.
- (3) もし  $v = 2$  の場合には, 上と同様の議論により,  $\zeta'$  の辺の個数は  $3$  の倍数で,  $3n$  個の辺が含まれている場合には,  $\zeta' = \eta^{-n}$  の形であることがわかる.

問題 2.  $\zeta$  を構成する辺の個数  $N$  についての数学的帰納法で証明する. 個数が  $N = 1$  のとき,  $\zeta = (v, v')$  というのであるから,  $\zeta$  は  $(v, v')$  に明らかに同値である.  $v$  を始点とし  $v'$  を終点とする辺の道であって, それを構成する辺の個数が  $N - 1$  のものは,  $(v, v')$  に同値であると仮定する.  $\zeta$  が  $v$  を始点とし  $v'$  を終点とする辺の道であって,  $\zeta$  を構成する辺の個数が  $N$  個のものだとする. このとき  $\zeta$  の最初の辺に注目すると, 次の形になっている:

$$\zeta = (v, v_1)(v_1, v_2)(v_2, v_3) \cdots$$

$v, v_1, v_2$  について, 場合分けして考える:

- (1)  $v = v_1$  のとき,  $\zeta = (v, v)(v, v_2)(v_2, v_3) \cdots \sim (v, v_2)(v_2, v_3) \cdots$  である.
- (2)  $v = v_2$  のとき,  $\zeta = (v, v_1)(v_1, v)(v, v_3) \cdots \sim (v, v)(v, v_3) \cdots$  である.
- (3)  $v_1 = v_2$  のとき,  $\zeta = (v, v_1)(v_1, v_1)(v_1, v_3) \cdots \sim (v, v_1)(v_1, v_3) \cdots$  である.
- (4) 上のいずれでもないとき, すなわち,  $v, v_1, v_2$  が互いに異なる頂点であるとき,  $\{v, v_1, v_2\}$  は  $K$  の単体であるので,  $\zeta \sim (v, v_2)(v_2, v_3) \cdots$  である.

いずれの場合でも,  $\zeta$  は辺の個数が  $N - 1$  個の辺の道に同値であるので, 帰納法の仮定より,  $(v, v')$  に同値である.  $v$  を始点とし  $v'$  を終点とする任意の辺の道は  $(v, v')$  に同値である.

問題 3. 問題 2 の結果から,  $v$  を基点とする任意の閉じた辺の道  $\zeta$  は,  $E(K, v)$  の単位元を代表する辺の道  $(v, v)$  に同値である.

問題 4.  $v'$  を始点として  $v$  を終点とする辺の道を  $\eta$  とする.  $v$  を基点とする辺の道  $\zeta$  に対して,  $\eta\zeta\eta^{-1}$  は  $v'$  を基点とする辺の道である. 逆に,  $v'$  を基点とする辺の道  $\zeta'$  に対して,  $\eta^{-1}\zeta'\eta$  は  $v$  を基点とする辺の道である. これを踏まえて, 次の写像を考える:

$$\begin{aligned}\alpha : E(K, v) &\rightarrow E(K, v'), & [\zeta] &\mapsto [\eta\zeta\eta^{-1}], \\ \alpha' : E(K, v') &\rightarrow E(K, v), & [\zeta'] &\mapsto [\eta^{-1}\zeta'\eta].\end{aligned}$$

$\alpha$  と  $\alpha'$  は, いずれも矛盾なく定義された準同型写像で, 互いの逆写像になっていることが確かめられる. 従って,  $E(K, v) \cong E(K, v')$  である.

問題 5.

(a)  $\varphi$  は単体写像であるので,  $(v, v')$  が  $K_1$  の辺であれば  $(\varphi(v), \varphi(v'))$  は  $K_2$  の辺である. また, ある単体  $s = \{v_0, \dots, v_q\} \in K_1$  に対して,  $v, v', v'' \in s$  であれば,  $\varphi(s) = \{\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_q)\}$  は  $K_2$  の単体であり,  $\varphi(v), \varphi(v'), \varphi(v'') \in \varphi(s)$  である. これらから,  $\varphi_*$  は同値な辺の道を同値な辺の道に移すので,  $\varphi_* : E(K_1, v) \rightarrow E(K_2, \varphi(v))$  は矛盾なく定義されている.  $v$  を基点とする閉じた辺の道  $\zeta$  と  $\zeta'$  に対して, 明らかに  $\varphi_*(\zeta\zeta') = \varphi_*(\zeta)\varphi_*(\zeta')$  が成り立つので,  $\varphi_* : E(K_1, v) \rightarrow E(K_2, \varphi(v))$  は準同型写像である.

(b) 定義から,

$$(\psi \circ \varphi)_*((v_0, v_1) \cdots) = \psi((\varphi(v_0), \varphi(v_1)) \cdots)$$

が成り立つので,  $K_1$  の任意の辺の道  $\zeta$  に対して,  $(\psi \circ \varphi)_*\zeta = \psi_*(\varphi_*\zeta)$  である. すなわち,  $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$  である. 従って,  $\varphi_* : E(K_1, v) \rightarrow E(K_2, \varphi(v))$  と  $\psi_* : E(K_2, \varphi(v)) \rightarrow E(K_3, \psi(\varphi(v)))$  に対しても,  $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$  が成り立つ.