

トポロジー 演習問題 (2017年4月19日)

以下,  $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$  とする.

問題 1. 位相空間の間のホモトピー同値が, 同値関係であることを証明せよ.

問題 2. 以下の部分空間  $A \subset X$  が強変形レトラクトであることを, レトラクションを構成して示せ.

- (1)  $A = \{(0, \dots, 0)\}, \quad X = \mathbb{R}^n.$
- (2)  $A = \mathbb{R}^n \times \{0\}, \quad X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$
- (3)  $A = \{\pm 1\}, \quad X = \mathbb{R} - \{0\}.$
- (4)  $A = S^n, \quad X = \mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}.$
- (5)  $A = \{(0, 0)\} \quad X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 \leq 1\}.$
- (6)  $A = S^1, \quad X = S^1 \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2\}.$
- (7)  $A = \mathbb{R} \times \{0\} / \sim, \quad X = \mathbb{R} \times [-1, 1] / \sim.$

ただし, (7) における同値関係  $\sim$  は以下で定義する:

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x \in \mathbb{Z}, \\ y' = (-1)^{x' - x} y. \end{cases}$$

問題 3.  $X$  を位相空間,  $Y$  を  $\mathbb{R}^n$  の部分空間とし,  $f, g: X \rightarrow Y$  を連続写像とする.

- (a) 各点  $x \in X$  に対して,  $f(x)$  と  $g(x)$  を結ぶ線分が  $Y$  に含まれるとする. このとき,  $f$  と  $g$  はホモトピックであることを示せ.
- (b) 任意の連続写像  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  はホモトピックであることを示せ.

問題 4.  $X$  を任意の位相空間とし, 連続写像  $f, g: X \rightarrow S^n$  は, 任意の  $x \in X$  に対して  $f(x) \neq -g(x)$  を満たすとする.

- (a) 任意の  $x \in X$  と  $t \in [0, 1]$  に対し,  $\|(1-t)f(x) + tg(x)\| \neq 0$  を示せ. ただし,  $v = (v_1, \dots, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  に対して,  $\|v\|$  は次で定める.

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_{n+1}^2}$$

(ヒント: 任意の  $v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$  に対し  $\|v - w\| \geq \left| \|v\| - \|w\| \right|$  が成り立つ.)

- (b)  $f$  と  $g$  はホモトピックであることを示せ.

以上.

## 解答例

問題 1. 対称律の証明だけ与える:  $X$  と  $Y$  がホモトピー同値であるということは, 連続写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $g: Y \rightarrow X$  であって,  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  と  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$  を満たすものが存在することだった. 従って, 連続写像  $g: Y \rightarrow X$  と  $f: X \rightarrow Y$  であって,  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$  と  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  を満たすものが存在する. すなわち,  $Y$  と  $X$  はホモトピー同値である.

問題 2. 包含写像を  $i: A \rightarrow X$  とする. レトラクション  $r: X \rightarrow A$  と,  $i \circ r \simeq_A \text{id}_X$  を与えるホモトピー  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$  の例は以下のとおりである.

- (1)  $r(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0), \quad H(x_1, \dots, x_n, t) = (tx_1, \dots, tx_n).$   
 (2)  $r(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n), \quad H(x_1, \dots, x_{n+1}, t) = (x_1, \dots, x_n, tx_{n+1}).$   
 (3)  $r(x) = \frac{x}{|x|}, \quad H(x, t) = \frac{x}{|x|^t}.$   
 (4)  $r(x) = \frac{x}{\|x\|}, \quad H(x, t) = \frac{x}{\|x\|^t}.$   
 (5)  $r(x, y) = (0, 0), \quad H(x, y, t) = (tx, ty).$   
 (6)  $r(x, y) = \begin{cases} (x, y), & ((x, y) \in S^1) \\ (1, 0), & ((x, 0) \in \overline{X - S^1}). \end{cases} \quad H(x, y, t) = \begin{cases} (x, y), & ((x, y) \in S^1) \\ (t(x-1) + 1, 0), & ((x, 0) \in \overline{X - S^1}). \end{cases}$   
 (7)  $r([x, y]) = [x, 0], \quad H([x, y], t) = [x, ty].$

## 問題 3.

- (a)  $f(x)$  と  $g(x)$  を結ぶ線分が  $Y$  に含まれるということは, 任意の  $x \in X$  と  $t \in [0, 1]$  に対して,  $(1-t)f(x) + tg(x) \in Y$  となることである. 従って, 次の連続写像が矛盾なく定義される.

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow Y, \quad H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

この  $H$  は  $f$  から  $g$  へのホモトピーである.

- (b)  $Y = \mathbb{R}^n$  とすると, 任意の  $f, g: X \rightarrow Y = \mathbb{R}^n$  に対して (a) の条件が成立する. 従って,  $f$  と  $g$  はホモトピックである.

## 問題 4.

- (a)  $\| \cdot \|$  の性質と,  $\|f(x)\| = \|g(x)\| = 1$  より次を得る:

$$\begin{aligned} \|(1-t)f(x) + tg(x)\| &\geq \left| \|(1-t)f(x)\| - \|tg(x)\| \right| \\ &= |(1-t)\|f(x)\| - t\|g(x)\|| = |(1-t) - t| = |1 - 2t|. \end{aligned}$$

従って,  $t \neq 1/2$  であれば,  $\|(1-t)f(x) + tg(x)\| \neq 0$  である.  $t = 1/2$  のとき,

$$\|(1-t)f(x) + tg(x)\| = \frac{1}{2}\|f(x) + g(x)\|$$

となるので, 問題の仮定より, これも 0 ではない. (一般に  $\|v\| = 0$  となるのは  $v = 0$  のときに限る.)

- (b)  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  に注意すると,  $f$  と  $g$  の間のホモトピーを以下で与えることができる:

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow S^n, \quad H(x, t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|}.$$