

トポロジー 演習問題 (2017年5月17日)

以下, 位相空間  $X$  の点  $x_0 \in X$  を基点とする基本群を  $\pi_1(X, x_0)$  と書く. また, 自然数  $n$  に対して, 位相空間  $S^n$  を以下で定める.

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

問題 1. 位相空間  $X$  の同値な道  $p, p'$  に対して,  $x_i = p(i) = p'(i)$ , ( $i = 0, 1$ ) とおき, 準同型  $\alpha_p, \alpha_{p'}$  を,

$$\begin{aligned} \alpha_p : \pi_1(X, x_1) &\rightarrow \pi_1(X, x_0), & [f] &\mapsto [(p * f) * \bar{p}], \\ \alpha_{p'} : \pi_1(X, x_1) &\rightarrow \pi_1(X, x_0), & [f] &\mapsto [(p' * f) * \bar{p}'], \end{aligned}$$

によって定めるとき,  $\alpha_p = \alpha_{p'}$  であることを示せ.

問題 2. 連続写像  $\phi : X \rightarrow Y$  に対して,  $\phi_*$  を以下で定める.

$$\phi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \phi(x_0)), \quad [f] \mapsto [\phi \circ f].$$

このとき, 以下が成り立つことを示せ.

- (a)  $\phi_*$  は矛盾なく定義され, 群の準同型である.
- (b) 連続写像  $\psi : Y \rightarrow Z$  に対して,  $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$  である.
- (c)  $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ .

問題 3. 位相空間  $X$  と  $Y$  に対し, 次の同型を示せ.

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

問題 4.  $A \subset X$  が位相空間  $X$  の強変形レトラクトであるとする. 基点  $x_0 \in A$  に対して,  $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0)$  であることを示せ.

問題 5. 弧状連結な位相空間  $X$  が, その弧状連結かつ単連結な開集合  $U, V \subset X$  によって  $X = U \cup V$  と表せたとする. さらに,  $U \cap V$  も弧状連結だとする. このとき,  $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$  であることを示せ. (ヒント: 4月26日の演習問題9を使う.)

問題 6.  $n \geq 2$  のとき,  $\pi_1(S^n, x_0) = \{1\}$  を示せ.

以上.

## 解答例

問題 1. 任意の  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$  に対して,  $\alpha_p([f]) = \alpha_{p'}([f])$  であることを示せばよい. 仮定より,

$$\begin{aligned} p \sim p' &\Rightarrow p * f \sim p' * f, \quad \bar{p} \sim \bar{p}' \\ &\Rightarrow (p * f) * \bar{p} \sim (p' * f) * \bar{p}'. \end{aligned}$$

なので,  $\alpha_p([f]) = \alpha_{p'}([f])$  である.

## 問題 2.

- (a) まず,  $[f] = [f'] \in \pi_1(X, x_0)$  に対し, 定義より  $f \sim f'$  である. 従って,  $\phi \circ f \sim \phi \circ f'$  である. これは  $\phi_*([f]) = \phi_*([f'])$  を意味するので, 確かに  $\phi_*$  は矛盾なく定義されている.  $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$  に対して,  $\phi \circ (f * g) = (\phi \circ f) * (\phi \circ g)$  であることが, 道の積の定義から確認できる. すなわち,  $\phi_*([f][g]) = \phi_*([f])\phi_*([g])$  が成り立ち,  $\phi_*$  は準同型である.
- (b) 任意の  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$  に対し,  $(\psi \circ \phi) \circ f = \psi \circ (\phi \circ f)$  が成り立つので,  $(\psi \circ \phi)_*([f]) = \psi_*(\phi_*([f]))$  となる. すなわち,  $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$  が成り立つ.
- (c) (b) と同様に, 任意の  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$  に対して,  $\text{id}_X \circ f = f$  が成り立つので,  $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$  となる.

問題 3. 写像  $\beta, \gamma$  を以下で定める.

$$\begin{aligned} \beta : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0), \quad [f] \mapsto ((\text{pr}_X)_*([f]), (\text{pr}_Y)_*([f])), \\ \gamma : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) &\rightarrow \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)), \quad ([f_X], [f_Y]) \mapsto [(f_X, f_Y)]. \end{aligned}$$

ただし,  $\text{pr}_X : X \times Y \rightarrow X$  と  $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$  は射影であり,  $(f_X, f_Y) : [0, 1] \rightarrow X \times Y$  は,  $(f_X, f_Y)(s) = (f_X(s), f_Y(s))$  によって定義された道である.  $\beta$  は矛盾なく定義された準同型である. なぜならば,  $\text{pr}_X$  と  $\text{pr}_Y$  が連続だからである.  $\gamma$  も矛盾なく定義されている. 実際, 同値  $f_X \sim g_X$  と  $f_Y \sim g_Y$  を与えるホモトピーが  $F : [0, 1] \rightarrow X$  と  $G : [0, 1] \rightarrow Y$  だとすれば, 同値  $(f_X, f_Y) \sim (g_X, g_Y)$  を与えるホモトピー  $H : [0, 1] \rightarrow X \times Y$  が,  $H(s, t) = (F(s, t), G(s, t))$  によって定義できるからである. 直接計算により,  $\beta \circ \gamma = \text{id}$  と  $\gamma \circ \beta = \text{id}$  が確認できるので,  $\beta$  は同型となり,  $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$  と  $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$  は同型な群である.

問題 4. 仮定より, 連続写像  $r : X \rightarrow A$  であって,  $r \circ i = \text{id}_A$  および  $i \circ r \simeq_A \text{id}_A$  を満たすものがある. ただし,  $i : A \rightarrow X$  は包含写像である.  $r \circ i = \text{id}_A$  より,  $r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = \text{id}$  を得るので,  $i_*$  は単射である. 同様に,  $i \circ r \simeq_A \text{id}_A$  より,  $i_* \circ r_* = (i \circ r)_* = \text{id}$  なので,  $i_*$  は全射である. (より明示的には, 任意の  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$  に対して,  $i \circ r \simeq_A \text{id}_A \Rightarrow i \circ r \circ f \simeq_{\{0,1\}} f \Leftrightarrow i \circ r \circ f \sim f$  であるので,  $i_* \circ r_* = \text{id}$  となる.)

問題 5.  $X$  が弧状連結なので, 基点  $x_0 \in X$  は  $x_0 \in U \cap V$  であると仮定してよい. 任意の  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$  は単位元 1 に一致することを示せばよい. 4 月 26 日の演習問題 9 より, ある自然数  $n$  と  $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_{n-1} < \sigma_n = 1$  という  $\sigma_i$ , ( $i = 0, \dots, n$ ) が存在して,

$$f_{i,i+1} : [0, 1] \rightarrow X, \quad f_{i,i+1}(s) = f((1-s)\sigma_i + s\sigma_{i+1})$$

によって定めた道  $f_{i,i+1}$  は,  $U$  または  $V$  の道であり,

$$f \sim (\dots((f_{0,1} * f_{1,2}) * f_{2,3}) * \dots) * f_{n-1,n}$$

が成り立つ. ここで,  $U, V$  と  $U \cap V$  が弧状連結であることから, 次のような道  $p_i : [0, 1] \rightarrow X$ , ( $i = 0, \dots, n$ ) が存在する:

- $p_i(0) = x_0$  と  $p_i(1) = f(\sigma_i)$  が成り立つ.
- $f(\sigma_i) \subset U \cap V$  ならば,  $p_i$  は  $U \cap V$  の道である.
- $f(\sigma_i) \not\subset U \cap V$  だが  $f(\sigma_i) \subset U$  ならば,  $p_i$  は  $U$  の道である.
- $f(\sigma_i) \not\subset U \cap V$  だが  $f(\sigma_i) \subset V$  ならば,  $p_i$  は  $V$  の道である.

これらの道  $p_i$  を使って, 道  $f'_i : [0, 1] \rightarrow X$  を  $f'_i = (p_i * f_{i,i+1}) * \bar{p}_i$  で定めると, これは  $f'_i(0) = f'_i(1) = x_0$  を満たす. さらに, 各  $f'_i$  は  $U$  または  $V$  の道である.  $U$  と  $V$  が単連結だという仮定を使うと,  $U$  または  $V$  の中で  $f'_i \sim c_{x_0}$  なので,  $\pi_1(X, x_0)$  の要素として  $[f'_i] = 1$  である. さて,  $p_i * \bar{p}_i \sim c_{x_0} \sim \bar{p}_i * p_i$  に注意すれば,

$$f \sim (\cdots ((f'_{0,1} * f'_{1,2}) * f'_{2,3}) * \cdots) * f'_{n-1,n}$$

が成り立つ. 従って,  $\pi_1(X, x_0)$  の要素として,

$$[f] = [f'_{0,1}][f'_{1,2}] \cdots [f'_{n-1,n}] = 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$$

となる.

問題 6.  $U$  と  $V$  を以下で定める.

$$U = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} > -1\},$$

$$V = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} < 1\}.$$

$U$  と  $V$  は可縮なので, 弧状連結かつ単連結である. また,  $U \cap V$  の部分空間

$$A = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}$$

は  $U \cap V$  の強変形レトラクトであり, さらに  $S^{n-1}$  に同相であるので, 弧状連結である. 従って, 問題 5 の結果から,  $\pi_1(S^n, x_0) = \{1\}$  である.