トポロジー 演習問題 (2017 年 5 月 24 日)

問題 1. 群 G の位相空間 X への真性不連続な作用は自由であることを示せ.

問題 2. 位相空間 X 上の被覆 $p : \tilde{X} \to X$ が与えられたとする.
(a) p は開写像であることを示せ.
(b) $\tilde{X}$ に同値関係 $\sim$ を以下で定める: $\tilde{x} \sim \tilde{x}' \Leftrightarrow p(\tilde{x}) = p(\tilde{x}')$. このとき, 商空間 $\tilde{X}/\sim$ は X と同相であることを示せ.

問題 3. 群 G が位相空間 X に自由に作用するとし, $p : X \to X/G$ を自然な射影とする. このとき, 任意の点 $\bar{x} \in X/G$ の逆像の濃度 $\mathrm{Card}(p^{-1}(\bar{x}))$ は, G の濃度 $\mathrm{Card}(G)$ と一致することを示せ.

問題 4. $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $p(z) = z^2$ で定めたものは, 被覆ではないことを示せ.

問題 5. 以下の群作用が真性不連続であることを示せ.

(a) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (n, x) \mapsto n + x.$

(b) $\mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \times [-1, 1]) \to \mathbb{R} \times [-1, 1] \qquad (n, x, y) \mapsto (n + x, (-1)^n y).$

問題 6. 以下の群作用が自由であることを示せ.

(a) $\mathbb{Z}_2 \times S^n \to S^n, \qquad ((-1)^a, x_0, \dots, x_n) \mapsto ((-1)^a x_0, \dots, (-1)^n x_n).$

(b) $\mathbb{Z}_k \times S^{2m+1} \to S^{2m+1}, \quad (e^{2\pi i n/k}, z_0, \dots, z_m) \mapsto (e^{2\pi i n/k} z_0, \dots, e^{2\pi i n/k} z_m).$

ただし, 自然数 k に対して, $\mathbb{Z}_k = \{e^{2\pi i n/k} \in \mathbb{C} |\ n = 0, \dots, k-1\}$ は位数 k の巡回群である. また (a) の S^n と (b) の S^{2m+1} は以下で定義するものとする.

$$S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} |\ x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\},$$
$$S^{2m+1} = \{(z_0, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1} |\ |z_0|^2 + \cdots + |z_m|^2 = 1\}.$$

以上.

解答例

問題 1. 群 G は位相空間 X に真性不連続に作用するので, 任意の $x \in X$ は以下の性質を満たす開近傍 $V \subset X$ を持つ: $g \neq 1 \Rightarrow V \cap gV = \emptyset$. $x \in V$ である一方で $gx \in gV$ であるので, $x \neq gx$ である. すなわち, 任意の $x \in X$ と任意の $g \in G$, $(g \neq 1)$ に対して $gx \neq x$ であるので, 群 G の X への作用は自由である.

問題 2.

(a) $\tilde{U} \subset X$ を開集合とする. $p : \tilde{X} \to X$ が被覆であることより, 各 $x \in p(\tilde{U}) \subset X$ に対して, $x \in U_x \subset X$ となる開集合 U_x であって,

(1) $p^{-1}(U_x) = \bigcup_{j \in J_x} \tilde{U}_x^j$,

(2) $j \neq j' \Rightarrow \tilde{U}_x^j \cap \tilde{U}_x^{j'}$,

(3) $p|_{\tilde{U}_x^j} : \tilde{U}_x^j \to U_x$ は同相である,

というものが存在する. すると, 次が成り立つ:

$$\tilde{U} = \bigcup_{x \in p(\tilde{U}), j \in J_x} \tilde{U}_x^j \cap \tilde{U}, \qquad p(\tilde{U}) = \bigcup_{x \in p(\tilde{U}), j \in J_x} p(\tilde{U}_x^j \cap \tilde{U}).$$

$\tilde{U} \subset X$ が開集合だったので, $\tilde{U}_x^j \cap \tilde{U}$ は $\tilde{U}_x^j$ の開集合である. (3) より $\tilde{U}_x^j \cap \tilde{U} \subset \tilde{U}_x^j$ は, p による像 $p(\tilde{U}_x^j \cap \tilde{U}) \subset U_x$ に同相である. 従って, $p(\tilde{U}_x^j \cap \tilde{U})$ は U_x の開集合である. U_x は X の開集合だったので, $p(\tilde{U}_x^j \cap \tilde{U})$ は X の開集合である. 結果として, $p(\tilde{U})$ は X の開集合 $p(\tilde{U}_x^j \cap \tilde{U})$, $(x \in p(U)$, $j \in J_x)$ の和集合になっているので, $p(\tilde{U})$ 自身も開集合である.

(b) $\tilde{x} \sim \tilde{x}'$ ならば $p(\tilde{x}) = p(\tilde{x}')$ であるので, 連続写像 $p : \tilde{X} \to X$ から, 連続写像 $h : \tilde{X}/\sim \to X$ が, $h([\tilde{x}]) = p(\tilde{x})$ によって誘導される. p が全単射であることはすぐに確認できる. (a) より p は開写像なので, h も開写像である. すなわち, h は同相写像である.

問題 3. $p^{-1}(\bar{x})$ と G に全単射があることを言えばよい. 勝手な点 $x_0 \in p^{-1}(\bar{x})$ を選び, $f : G \to p^{-1}(\bar{x})$ を $f(g) = gx_0$ によって定める. $p : X \to X/G$ は自然な射影だったことから, $p^{-1}(\bar{x}) = \{x \in X |\ \exists g \in G, gx = x_0\}$ である. これより, f は全射であることがわかる. f が単射であることを示すために, $g, h \in G$, $g \neq h$ が与えられたとする. G の X への作用が自由だったことから, $h^{-1}gx_0 \neq x_0$ である. $h : X \to X$ は全単射であるので, $gx_0 \neq hx_0$ である. すなわち f は単射である.

問題 4. 仮に $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が被覆だとすると, $0 \in \mathbb{C}$ の開近傍 $U \subset \mathbb{C}$ であって,

(1) $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \tilde{U}_j$,

(2) $j \neq j' \Rightarrow \tilde{U}_j \cap \tilde{U}_{j'}$,

(3) $p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \to U$ は同相である,

というものが存在する. $U \subset \mathbb{C}$ は開集合なので, 0 以外の点を含む. それを $w \in U$ とするとき, ある $z \in \mathbb{C}$ であって, $(\pm z)^2 = w$ および $-z \neq z$ となるものが存在する. この事実と (1), (2), (3) より, J は二つの要素からなる集合 $J = \{1, 2\}$ で, たとえば $z \in \tilde{U}_1$ ならば $-z \in \tilde{U}_2$ であることがわかる. ここで (1), (2), (3) と $0 \in U$ を使うと, $j = 1, 2$ に対してある要素 $0_j \in \tilde{U}_j$ が存在し, $0_1 \neq 0_2$ および $p(0_j) = (0_j)^2 = 0$ が成り立つ. すなわち, 方程式 $z^2 = 0$ が異なる二つの複素数解 $z = 0_1, 0_2$ を持つことになる. $z^2 = 0$ を満たす z は $z = 0$ だけなので, これは矛盾である.

問題 5.

(a) 実数 ϵ を $0 < \epsilon < 1/2$ となるように選ぶ. 各 $x \in X$ に対して, $V_x = (x-\epsilon, x+\epsilon)$ と定める. 任意の $n, n' \in \mathbb{Z}, n \neq n'$ に対して, $x' = x+n$ および $m = n'-n \neq 0$ とおくと, 以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} nV_x \cap n'V_x &= (x+n-\epsilon, x+n+\epsilon) \cap (x+n'-\epsilon, x+n'+\epsilon) \\ &= (x'-\epsilon, x'+\epsilon) \cap (x'+m-\epsilon, x'+m+\epsilon). \end{aligned}$$

$m > 0$ ならば $\epsilon < m - \epsilon$ が成り立ち, $m < 0$ ならば $m + \epsilon < -\epsilon$ が成り立つ. 従って, $nV_x \cap n'V_x = \emptyset$ であり, 今考えている群作用は真性不連続である.

(b) 実数 ϵ を $0 < \epsilon < 1/2$ となるように選び, 各 $x \in X$ に対して, $V_x = (x-\epsilon, x+\epsilon) \times [-1, 1]$ と定める. すると, 上と同じ議論により, $nV \cap n'V = \emptyset$ であることが示せる.

問題 6.

(a) 各 $x \in S^n$ と $-1 \in \mathbb{Z}_2$ に対して $-x \neq x$ が成り立つことを言えばよいが, それは確かに成り立っている. ($-x = x$ が成り立つような $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ は $x = (0, \ldots, 0)$ だけだが, それは S^n には含まれない点である.)

(b) 各 $z \in S^{2m+1}$ に対して, もし $g \in \mathbb{Z}_k$ が $gz = z$ を満たすならば, $g = 1$ であることを示せばよい. $z = (z_0, \ldots, z_m)$ と表示すると, $gz = z$ が成り立つのは, $z_j = gz_j$ が $j = 0, \ldots, m$ に対して成り立つとき, そのときに限る. $z \in S^{2m+1}$ なので, z_j のうちどれかは 0 ではない. そのとき $z_j = gz_j$ に z_j^{-1} をかければ $g = 1$ となる.