

トポロジー 演習問題 (2017 年 6 月 7 日)

問題 1.  $n$  行  $n$  列の複素数係数行列  $M(n, \mathbb{C})$  の部分集合  $U(n)$  と  $SU(n)$  を

$$U(n) = \{U \in M(n, \mathbb{C}) \mid UU^* = E\}, \quad SU(n) = \{U \in U(n) \mid \det U = 1\},$$

で定める. ただし,  $U^* = {}^t\bar{U}$  は  $U$  の共役行列で,  $E$  は単位行列である.

- (a)  $U(n)$  と  $SU(n)$  は行列の積によって群になることを示せ.
- (b) 3次元球面  $S^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=0}^3 x_i^2 = 1\}$  と  $SU(2)$  の間に全単射があることを示せ. (ヒント: 任意の  $U \in SU(2)$  は二つの複素数  $u, v$  を用いて記述することができる.)
- (c) 単射準同型  $U(1) \rightarrow SU(2)$  の例を構成せよ. (ヒント: 対角行列を考える.)

問題 2. 群  $G$  とその部分群  $H \subset G$  が与えられたとき,  $H$  の  $G$  への作用  $H \times G \rightarrow G$  を  $(h, g) \mapsto hg$  で定める. この作用は自由であることを示せ.

問題 3. 自然数  $n$  に対し, 位数  $n$  の巡回群を  $\mathbb{Z}_n$  と書く.

- (a) 単射準同型  $\mathbb{Z}_n \rightarrow SU(2)$  の例を構成せよ.
- (b) 基本群が  $\mathbb{Z}_n$  に同型であるような位相空間  $X_n$  の例を構成せよ.
- (c) 基本群が  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  に同型であるような位相空間  $X_{m,n}$  の例を構成せよ. (ヒント: 直積空間の基本群についての公式.)

問題 4. 以下で与える群  $G$  の位相空間  $X$  への作用  $G \times X \rightarrow X$  について, 商空間  $X/G$  の  $x_0 \in X/G$  を基点とする基本群  $\pi_1(X/G, x_0)$  を求めよ.

- (1)  $G = \mathbb{Z}, X = \mathbb{R},$

$$G \times X \rightarrow X, \quad (n, x) \mapsto n + x. \quad x_0 = [0].$$

- (2)  $G = \mathbb{Z}^2, X = \mathbb{R}^2,$

$$G \times X \rightarrow X, \quad (n_1, n_2, x_1, x_2) \mapsto (n_1 + x_1, n_2 + x_2). \quad x_0 = [(0, 0)].$$

- (3)  $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}, X = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$

$$G \times X \rightarrow X, \quad (\pm 1, (x, y, z)) \mapsto \pm(x, y, z). \quad x_0 = [(1, 0, 0)].$$

- (4)  $G = \mathbb{Z}_3 = \{e^{\frac{2\pi ik}{3}} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z}\}, X = S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\},$

$$G \times X \rightarrow X, \quad (e^{\frac{2\pi ik}{3}}, (z, w)) \mapsto e^{\frac{2\pi ik}{3}}(z, w). \quad x_0 = [(1, 0)].$$

- (5)  $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}, X = \mathbb{R},$

$$G \times X \rightarrow X, \quad (\pm 1, x) \mapsto \pm x. \quad x_0 = [0].$$

以上.

## 解答例

## 問題 1.

- (a)  $U, V \in U(n)$  に対して  $(UV)(UV)^* = UVV^*U^* = UU^* = E$  が成り立つので、積  $U(n) \times U(n) \rightarrow U(n)$  が定義されている. 行列の積の性質から、任意の  $U, V, W \in U(n)$  に対して、 $(UV)W = U(VW)$  が成り立つ. また、単位行列  $E$  は  $U(n)$  の要素であり、任意の  $U \in U(n)$  に対してその逆行列  $U^{-1} = U^*$  も  $U(n)$  の要素である. すなわち、 $E$  を単位元とし、 $U^{-1}$  を  $U$  の逆元として、 $U(n)$  は群の公理を満たしている.

一方で、 $SU(n)$  が群であることを示すために、行列式  $\det : U(n) \rightarrow U(1)$  は群の準同型であることを思い出す.  $SU(n)$  はこの準同型の核と一致するので、 $U(n)$  の部分群として、たしかに群である.

- (b) 任意の  $U \in SU(2)$  は、 $|u|^2 + |v|^2 = 1$  を満たす複素数  $u, v \in \mathbb{C}$  によって、 $U = \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}$  の形に書ける. 従って、

$$S^3 \rightarrow SU(2), \quad (x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & -x_2 + ix_3 \\ x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}$$

という写像は  $S^3$  から  $SU(2)$  への全単射である.

- (c)  $U(1) \rightarrow SU(2)$  を  $u \mapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix}$  で定めると、これは単射準同型になっていることが確かめられる.

問題 2. 任意の  $g \in G$  と  $h \in H$ ,  $h \neq 1$  に対して、 $hg \neq g$  が成り立っているから、 $H$  の  $G$  への作用は自由である.

## 問題 3.

- (a) 例えば巡回群  $\mathbb{Z}_n$  を  $\mathbb{Z}_n = \{e^{2\pi ik/n} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z}\}$  と表すとき、 $e^{2\pi ik/n} \mapsto \begin{pmatrix} e^{2\pi ik/n} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi ik/n} \end{pmatrix}$  は単射準同型の例である.
- (b) (a) の単射により、 $\mathbb{Z}_n$  を  $SU(2)$  の部分群とみなす. また、問題 1(b) により、 $SU(2)$  を Hausdorff 位相空間  $S^3$  とみなす. すると、問題 2 より、群  $\mathbb{Z}_n$  は Hausdorff 位相空間  $SU(2)$  に自由に作用する. この作用から、被覆  $p : SU(2) \rightarrow SU(2)/\mathbb{Z}_n$  が定義される.  $SU(2) \approx S^3$  の基本群は自明なので、同型  $\mathbb{Z}_n \cong \pi_1(SU(2)/\mathbb{Z}_n)/p_*(\pi_1(SU(2))) \cong \pi_1(SU(2)/\mathbb{Z}_n)$  が得られる. すなわち、 $SU(2)/\mathbb{Z}_n$  は  $X_n$  の例である.
- (c) 基本群の性質より、 $(SU(2)/\mathbb{Z}_m) \times (SU(2)/\mathbb{Z}_n)$  は  $X_{m,n}$  の例である.

## 問題 4.

- (1) 群作用は真性不連続であるので、自然な射影  $p : X \rightarrow X/G$  は被覆である. 被覆空間  $X = \mathbb{R}$  は弧状連結で、その基本群は自明であるので、 $\pi_1(X/G, x_0) \cong G = \mathbb{Z}$  となる.
- (2) (1) と同じ議論により、 $\pi_1(X/G, x_0) \cong G = \mathbb{Z}^2$  である.
- (3) (1) と同じ議論により、 $\pi_1(X/G, x_0) \cong G = \mathbb{Z}_2$  である.
- (4) (1) と同じ議論により、 $\pi_1(X/G, x_0) \cong G = \mathbb{Z}_3$  である.
- (5) 商空間  $X/G$  は、半直線  $[0, +\infty)$  と同相であり、特に可縮である. 従って  $\pi_1(X/G, x_0) = \{1\}$  である.