# トポロジー 演習問題 (2017 年 6 月 14 日)

問題 1. $\epsilon \in \mathbb{R}$ および $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ に対し, $S^1 = \{u \in \mathbb{C} | \ |u| = 1\}$ 上の被覆を次のように定める:

$$p_\epsilon : \mathbb{R} \to S^1, \qquad p_\epsilon(x) = \exp 2\pi i(x + \epsilon),$$
$$p_k : S^1 \to S^1, \qquad p_k(u) = u^k.$$

(a) 被覆 $p_\epsilon : \mathbb{R} \to S^1$ と $p_0 : \mathbb{R} \to S^1$ の間の同値を構成せよ.

(b) 被覆 $p_k : S^1 \to S^1$ と $p_{-k} : S^1 \to S^1$ の間の同値を構成せよ.

問題 2. 被覆 $p : \tilde{X} \to X$ であって, $\tilde{X}$ が弧状連結なものが与えられたとする. また, $x_0 \in X$ をある点とし, 点 $\tilde{x}_0, \tilde{x}'_0 \in p^{-1}(x_0)$ が与えられたとする. このとき, $\tilde{X}$ の基本群の $p_*$ による像:

$$p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)),\ p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$$

は共役な部分群であることを示せ.

問題 3. $i = 1, 2$ に対して, 被覆 $p_i : \tilde{X}_i \to X$ であって, $\tilde{X}_i$ が弧状連結なものが与えられたとする. また, $x_0 \in X$ をある点とし, $i = 1, 2$ に対して点 $\tilde{x}_i \in p_i^{-1}(x_0)$ が与えられたとする. 被覆 $\tilde{X}_1$ と $\tilde{X}_2$ が同値ならば, $\tilde{X}_i$ の基本群の $p_{i*}$ による像:

$$p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)),\ p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)) \subset \pi_1(X, x_0)$$

は共役な部分群であることを示せ. (ヒント: 問題 2 を使う.)

問題 4. $X$ は連結, 局所弧状連結かつ半局所単連結な位相空間とする.

(a) $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_2$ のとき, $X$ 上の弧状連結な被覆 $p : \tilde{X} \to X$ の同値類の個数を答えよ.

(b) $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_3$ のとき, $X$ 上の弧状連結な被覆 $p : \tilde{X} \to X$ の同値類の個数を答えよ.

(c) $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_4$ のとき, $X$ 上の弧状連結な被覆 $p : \tilde{X} \to X$ の同値類の個数を答えよ.

(d) $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ のとき, $X$ 上の弧状連結な被覆 $p : \tilde{X} \to X$ の同値類の個数を答えよ.

(e) $\pi_1(X)$ が 3 次の対称群 $S_3$ に同型なとき, $X$ 上の弧状連結な被覆 $p : \tilde{X} \to X$ の同値類の個数を答えよ.

以上.

---

http://math.shinshu-u.ac.jp/~kgomi/class/index.html.

解答例

問題 1.

(a) 写像 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $h(x) = x + \epsilon$ によって定める. これは明らかに同相写像で, $p_0 \circ h = p_\epsilon$ が成り立つので, 被覆の同値である. ($h^{-1}$ も正しい答えである.)

(b) 写像 $h : S^1 \to S^1$ を $h(u) = u^{-1}$ によって定める. これは明らかに同相写像で, $p_k \circ h = p_{-k}$ が成り立つので, 被覆の同値である.

問題 2. $\tilde{X}$ は弧状連結なので, $\tilde{x}_0$ から $\tilde{x}'_0$ への道 $\tilde{g} : [0,1] \to \tilde{X}$ が存在する. $p \circ \tilde{g} : [0,1] \to X$ は, $x_0$ を基点とする $X$ 内の閉じた道である. $\gamma = [p \circ \tilde{g}] \in \pi_1(X, x_0)$ とおく. さて, 任意の $\eta' \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0))$ は, ある $[\tilde{f}'] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0)$ を用いて, $\eta' = p_*[\tilde{f}']$ と書ける. このとき, $(\overline{\tilde{g}} * \tilde{f}') * \tilde{g}$ は $\tilde{X}$ 内の $\tilde{x}_0$ を基点とする閉じた道である. $\eta = p_*[(\overline{\tilde{g}} * \tilde{f}') * \tilde{g}] \in \pi_1(X, x_0)$ とおくと, 次が成り立つ:

$$\gamma\eta\gamma^{-1} = [p \circ \tilde{g}][p \circ \overline{\tilde{g}}][p \circ \tilde{f}'][p \circ \tilde{g}][p \circ \overline{\tilde{g}}] = [p \circ \tilde{f}'] = \eta'.$$

すなわち, 部分群 $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)), p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0))$ は共役である.

問題 3. 仮定より, 同相写像 $h : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ で $p_2 \circ h = p_1$ を満たすものが存在する. $h$ は同相なので, 同型写像 $h_* : \pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to \pi_1(\tilde{X}_2, h(\tilde{x}_1))$ が誘導され, 特に, $h_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = \pi_1(\tilde{X}_2, h(\tilde{x}_1))$ である. また, $p_2 \circ h = p_1$ なので, $\pi_1(X, x_0)$ の部分群として,

$$p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(h_*(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))) = p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, h(\tilde{x}_1)))$$

が成り立つ. $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_0)$ だったので, $h(\tilde{x}_1) \in p_2^{-1}(x_0)$ が成り立つ. 従って, 問題 2 の結果より, $p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, h(\tilde{x}_1)))$ と $p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ は $\pi_1(X, x_0)$ の部分群として共役である. すなわち, $p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))$ と $p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ も共役である.

問題 4. 仮定のもとでは, $X$ 上の被覆 $p : \tilde{X} \to X$ であって $\tilde{X}$ が弧状連結になるものの同値類の個数は, $\pi_1(X)$ の部分群の共役類の個数と一致する. 特に, $\pi_1(X)$ が可換群であれば, 部分群の共役類の個数と, 部分群の個数は一致する.

(a) $\mathbb{Z}_2$ は可換群なので, その部分群の個数を答えればよい. $\mathbb{Z}_2$ の部分群は $\{1\}$ と $\mathbb{Z}_2$ しかないので, 答えは 2 個である.

(b) 可換群 $\mathbb{Z}_3$ の部分群は $\{1\}$ と $\mathbb{Z}_3$ しかないので, 答えは 2 個である.

(c) 可換群 $\mathbb{Z}_4 = \{\pm 1, \pm i\}$ の部分群は, $\{1\}$, $\{\pm 1\}$ および $\mathbb{Z}_4$ のみであるので, 答えは 3 個である.

(d) 可換群 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\pm 1, \pm 1)\}$ の部分群は, $\{(1,1)\}$, $\{(1, \pm 1)\}$, $\{(\pm 1, 1)\}$, $\{\pm(1,1)\}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ のみであるので, 答えは 5 個である.

(e) $S_3$ の部分群は, 全部で 6 個ある:

$$\{(1)\},\ \{(1),(12)\},\ \{(1),(23)\},\ \{(1),(13)\},\ \{(1),(123),(132)\}, S_3.$$

このうち, 位数 2 の部分群 3 個は, 互いに共役な部分群であることが確認できる. 従って, $S_3$ の部分群の共役類の個数は 4 個であり, 答えは 4 個である.