トポロジー 演習問題 (2017 年 6 月 28 日)

問題 1. 以下で定める集合 V_i および V_i の部分集合からなる集合 K_i について, V_i を頂点集合とする単体複体になるものをすべて選び, その次元を答えよ. また, 単体複体となる K_i のうち, その実現 $|K_i|$ が 1 点からなる空間 pt とホモトピー同値であるものをすべて答えよ.

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \{0,1\}, & K_1 &= \{\{0\}\}.\\
V_2 &= \{0,1\}, & K_2 &= \{\{0\},\{1\}\}.\\
V_3 &= \{0,1\}, & K_3 &= \{\{1\},\{0,1\}\}.\\
V_4 &= \{0,1\}, & K_4 &= \{\{0\},\{1\},\{0,1\}\}.\\
V_5 &= \{0,1,2\}, & K_5 &= \{\{0\},\{1\}\}.\\
V_6 &= \{0,1,2\}, & K_6 &= \{\{0\},\{1\},\{2\}\}.\\
V_7 &= \{0,1,2\}, & K_7 &= \{\{0\},\{1\},\{0,1\}\}.\\
V_8 &= \{0,1,2\}, & K_8 &= \{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\}\}.\\
V_9 &= \{0,1,2\}, & K_9 &= \{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1,2\}\}.\\
V_{10} &= \{0,1,2\}, & K_{10} &= \{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,1,2\}\}.\\
V_{11} &= \{0,1,2\}, & K_{11} &= \{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{1,2\}\}.\\
V_{12} &= \{0,1,2\}, & K_{12} &= \{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}\}.\\
V_{13} &= \{0,1,2\}, & K_{13} &= \{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}.\\
V_{14} &= \{0,1,2,3\}, & K_{14} &= \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,1,2\}\}.\\
V_{15} &= \{0,1,2,3\}, & K_{15} &= \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}.\\
V_{16} &= \{0,1,2,3\}, & K_{16} &= \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,3\},\{0,1,2\}\}.\\
V_{17} &= \{0,1,2,3\}, & K_{17} &= \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}.\\
V_{18} &= \{0,1,2,3\}, & K_{18} &= \left\{\begin{array}{l}\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\\ \{1,3\},\{0,1,2\},\{0,2,3\}\end{array}\right\}.\\
V_{19} &= \{0,1,2,3\}, & K_{19} &= \left\{\begin{array}{l}\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\\ \{2,3\},\{0,1,2\},\{0,2,3\}\end{array}\right\}.\\
V_{20} &= \{0,1,2,3\}, & K_{20} &= \left\{\begin{array}{l}\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\\ \{1,3\},\{0,1,2\},\{0,1,3\},\{0,2,3\}\end{array}\right\}.\\
V_{21} &= \{0,1,2,3\}, & K_{21} &= \left\{\begin{array}{l}\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\\ \{1,3\},\{2,3\},\{0,1,2\},\{0,1,3\},\{0,2,3\}\end{array}\right\}.\\
V_{22} &= \{0,1,2,3\}, & K_{22} &= \left\{\begin{array}{l}\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\\ \{1,3\},\{2,3\},\{0,1,2\},\{0,1,3\},\{0,2,3\},\{0,1,2,3\}\end{array}\right\}.
\end{aligned}
$$

問題 2. 頂点集合を $V=\{0,1,\dots,n\}$ とする n 次元単体複体 K はただ一つしかないことを証明せよ.

以上.

解答.

問題 1.

単体複体になる K_i	次元	$\lvert K_i\rvert$ とホモトピー同値となる空間
K_2	0	$\mathrm{pt}\sqcup\mathrm{pt}$
K_4	1	pt
K_6	0	$\mathrm{pt}\sqcup\mathrm{pt}\sqcup\mathrm{pt}$
K_8	1	$\mathrm{pt}\sqcup\mathrm{pt}$
K_{11}	1	pt
K_{12}	1	S^1
K_{13}	2	pt
K_{15}	2	$\mathrm{pt}\sqcup\mathrm{pt}$
K_{17}	2	pt
K_{19}	2	pt
K_{21}	2	pt

問題 2. K は n 次元単体複体なので, n 単体を含むはずである. n 単体とは $n+1$ 個の頂点を含む単体であったので, 今の場合, n 単体は $s=\{0,1,\ldots,n\}$ しかない. 単体複体の定義より, s の空でない部分集合は全て K に含まれるはずである. それは, K の頂点集合 $\{0,1,\ldots,n\}$ の空でない部分集合全体と一致する:

$$K=\{V=\{0,1,\cdots,n\}\text{ の部分集合 }\}.$$

そのような単体複体は他にないので, 問題 2 の性質を持つ単体複体 K はただ一つしかない.