トポロジー 演習問題 (2017 年 7 月 5 日)

以下, $\mathbb{R}^n$ および $\mathbb{C}^n$ の部分集合には, $\mathbb{R}^n$ および $\mathbb{C}^n$ の標準的な位相から誘導された位相が与えられているものとする.

問題 1. 以下で与える連続写像 f_0 と f_1 の間のホモトピーの例を書け.

[1] $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

$$f_i : [0,1] \to X, \qquad \begin{cases} f_0(s) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\pi s, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\pi s, \frac{1}{\sqrt{2}}), \\ f_1(s) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\pi s, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\pi s, -\frac{1}{\sqrt{2}}). \end{cases}$$

[2] $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.

$$f_i : [0,1] \to X, \qquad \begin{cases} f_0(s) = (\sqrt{2}\cos 2\pi s, \sqrt{2}\sin 2\pi s, 1), \\ f_1(s) = (\sqrt{2}\cos 2\pi s, \sqrt{2}\sin 2\pi s, -1). \end{cases}$$

[3] $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

$$f_i : [0,1] \to X, \qquad \begin{cases} f_0(s) = (0, 0, 0), \\ f_1(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 1). \end{cases}$$

[4] $X = \{((4 + \cos\theta)\cos\varphi, (4 + \cos\theta)\sin\varphi, \sin\theta) \in \mathbb{R}^3 |\ \theta, \varphi \in \mathbb{R}\}$

$$f_i : [0,1] \to X, \qquad \begin{cases} f_0(s) = (4 + \cos 2\pi s, 0, \sin 2\pi s), \\ f_1(s) = (-4 - \cos 2\pi s, 0, \sin 2\pi s). \end{cases}$$

問題 2. 以下で与える連続写像 $f_0 : X \to Y$ と $f_1 : X \to Y$ の間のホモトピーであって, $A \subset X$ を動かさないものの例を書け.

[1] $X = [0, +\infty)$, $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = x^2\}$.

$$A = \{0\}, \qquad \begin{cases} f_0(s) = (0, 0), \\ f_1(s) = (s, s^2). \end{cases}$$

[2] $X = [0, 1]$, $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.

$$A = \{0, 1\}, \qquad \begin{cases} f_0(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0), \\ f_1(s) = (\sqrt{1 + \sin^2 \pi s}\cos 2\pi s, \sqrt{1 + \sin^2 \pi s}\sin 2\pi s, \sin \pi s). \end{cases}$$

[3] $X = [0, 1]$, $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 - z = 0\}$

$$A = \{0, 1\}, \qquad \begin{cases} f_0(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s, 1), \\ f_1(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s, 1). \end{cases}$$

[4] $X = [0, 1]$, $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$

$$A = \{0, 1\}, \qquad \begin{cases} f_0(s) = (\cos \pi s, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin \pi s, 0), \\ f_1(s) = (\cos \pi s, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin \pi s, 0). \end{cases}$$

[5] $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$

$$A = \{0\}, \qquad \begin{cases} f_0(x) = (x, 0), \\ f_1(x) = (x, 2x). \end{cases}$$

[6] $X=\mathbb{R}^2$, $Y=\mathbb{R}^3$

$$A=\{(0,0)\},\qquad \begin{cases} f_0(x,y)=(x,y,0),\\ f_1(x,y)=(x,x+y,y).\end{cases}$$

[7] $X=[0,1]$, $Y=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ y=x^2\}$

$$A=\{0\},\qquad \begin{cases} f_0(x)=(x,x^2),\\ f_1(s)=(-x,x^2).\end{cases}$$

[8] $X=[0,1]$, $Y=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x^2+y^2=1\}$

$$A=\{0\},\qquad \begin{cases} f_0(s)=(\cos\pi s,\sin\pi s),\\ f_1(s)=(\cos\pi s,-\sin\pi s).\end{cases}$$

問題 3. 以下で与える位相空間 X と, その部分空間 $\mathrm{pt}\subset X$ であって 1 点からなるものが, ホモトピー同値であること (同じホモトピー型を持つこと) を, 強変形レトラクトの例を構成することによって示せ.

[1] $X=[0,+\infty)$, $\mathrm{pt}=\{0\}$.

[2] $X=\{(x,x^2)\in\mathbb{R}^2|\ x\geq 0\}$, $\mathrm{pt}=\{(0,0)\}$.

[3] $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ y=0\}$, $\mathrm{pt}=\{(0,0)\}$.

[4] $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ 2x-y=0\}$, $\mathrm{pt}=\{(0,0)\}$.

[5] $X=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2|\ z=0\}$, $\mathrm{pt}=\{(0,0,0)\}$.

[6] $X=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2|\ x+y+z=0\}$, $\mathrm{pt}=\{(0,0,0)\}$.

問題 4. 以下で与える位相空間 X と Y のホモトピー同値の例を書け. ただし, pt は一点からなる空間を意味する.

[1] $\begin{cases} X=\mathrm{pt},\\ Y=\{(\cos\theta,\sin\theta,\theta)\in\mathbb{R}^3|\ \theta\in\mathbb{R}\}.\end{cases}$

[2] $\begin{cases} X=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0\},\\ Y=\mathrm{pt}.\end{cases}$

[3] $\begin{cases} X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x^2+y^2=1\},\\ Y=\{((4+\cos\theta)\cos\varphi,(4+\cos\theta)\sin\varphi,\sin\theta)\in\mathbb{R}^3|\ 0\leq\varphi\leq\pi,\theta\in\mathbb{R}\}.\end{cases}$

[4] $\begin{cases} X=\mathrm{pt},\\ Y=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x^2-y^2=0\}.\end{cases}$

[5] $\begin{cases} X=\mathbb{R},\\ Y=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2|\ yz=0\}.\end{cases}$

問題 5. 以下で与える被覆 $p:\tilde{X}\to X$, 道 $f:[0,1]\to X$ および点 $\tilde{x}_0\in\tilde{X}$ に対して, f の持ち上げ $\tilde{f}:[0,1]\to\tilde{X}$ であって $\tilde{f}(0)=\tilde{x}_0$ となるものを書け. なお, $S^1=\{z\in\mathbb{C}|\ |z|=1\}$ とする.

[1] $p:\mathbb{R}\to S^1$, $p(x)=\exp 2\pi ix$.

$$f(s)=\exp 6\pi is,\qquad \tilde{x}_0=0.$$

[2] $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = \exp 2\pi i x$.

$$f(s) = \exp(-2\pi i s), \qquad \tilde{x}_0 = 1.$$

[3] $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = \exp 2\pi i x$.

$$f(s) = \exp \pi i s, \qquad \tilde{x}_0 = -1.$$

[4] $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = \exp 2\pi i x$.

$$f(s) = -\exp \frac{\pi i s}{4}, \qquad \tilde{x}_0 = \frac{1}{2}.$$

[5] $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = \exp \pi i x$.

$$f(s) = \exp 2\pi i s, \qquad \tilde{x}_0 = 0.$$

[6] $p : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$, $p(x, y) = (\exp 2\pi i x, \exp 2\pi i y)$.

$$f(s) = (\exp 2\pi i s, \exp 4\pi i s), \qquad \tilde{x}_0 = (1, 0).$$

[7] $p : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$, $p(x, y) = (\exp 2\pi i x, \exp 2\pi i y)$.

$$f(s) = (\exp 2\pi i s, \exp(-3\pi i s)), \qquad \tilde{x}_0 = (1, -1).$$

[8] $p : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$, $p(x, y) = (\exp 2\pi i x, \exp 2\pi i y)$.

$$f(s) = (\exp \pi i s, \exp 4\pi i s), \qquad \tilde{x}_0 = (0, 1).$$

[9] $p : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$, $p(x, y) = (\exp 2\pi i x, \exp 2\pi i y)$.

$$f(s) = (\exp \frac{\pi i s}{3}, \exp \frac{-4\pi i s}{5}), \qquad \tilde{x}_0 = (0, 0).$$

[10] $p : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$, $p(x, y) = (\exp 2\pi i x, \exp \pi i y)$.

$$f(s) = (\exp \pi i s, \exp 2\pi i s), \qquad \tilde{x}_0 = (2, 2).$$

[11] $p : S^1 \to S^1$, $p(z) = z^2$.

$$f(s) = \exp 2\pi i s, \qquad \tilde{x}_0 = 1.$$

[12] $p : S^1 \to S^1$, $p(z) = z^2$.

$$f(s) = \exp \frac{\pi i s}{3}, \qquad \tilde{x}_0 = 1.$$

[13] $p : S^1 \to S^1$, $p(z) = z^2$.

$$f(s) = \exp 4\pi i s, \qquad \tilde{x}_0 = -1.$$

[14] $p : S^1 \to S^1$, $p(z) = z^2$.

$$f(s) = \exp \frac{-2\pi i s}{5}, \qquad \tilde{x}_0 = -1.$$

[15] $p : S^1 \to S^1$, $p(z) = z^3$.

$$f(s) = \exp 2\pi i s, \qquad \tilde{x}_0 = 1.$$

[16] $p : S^1 \to S^1$, $p(z) = z^4$.

$$f(s) = \exp \pi i s, \qquad \tilde{x}_0 = i.$$

[17] $p : S^1 \to S^1$, $p(z) = z^3$.

$$f(s) = \exp(-\pi i s), \qquad \tilde{x}_0 = \exp \frac{2\pi i}{3}.$$

[18] $p : S^1 \to S^1$, $p(z) = z^3$.

$$f(s) = \exp 2\pi is, \qquad \tilde{x}_0 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

[19] $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = \exp 2\pi ix$.

$$f(s) = \begin{cases} \exp 2\pi is, & (0 \le s \le 1/2) \\ \exp 2\pi i(3s-1), & (1/2 \le s \le 1) \end{cases} \qquad \tilde{x}_0 = 0.$$

[20] $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = \exp 2\pi ix$.

$$f(s) = \begin{cases} \exp 2\pi is, & (0 \le s \le 1/2) \\ \exp(-2\pi is), & (1/2 \le s \le 1) \end{cases} \qquad \tilde{x}_0 = 1.$$

問題 6. 以下で与える群 G の位相空間 X への作用 $G \times X \to X$ から, 商空間 X/G への自然な射影 $p : X \to X/G$, $(p(x) = [x])$ によって被覆を定める. このとき, 以下で与える道 $\bar{f} : [0,1] \to X/G$ の, 点 $x_0 \in X$ を始点とする持ち上げ $f : [0,1] \to X$ を書け. なお, $\mathbb{Z}_p = \{\zeta \in \mathbb{C} | \ \zeta^p = 1\}$ は位数 p の巡回群を意味し, 自然数 n に対して $S^{2n-1} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n | \ |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ とする.

[1] $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}$, $G \times X \to X$, $((n,x) \mapsto n+x)$.

$$\bar{f}(s) = [s], \qquad x_0 = 0.$$

[2] $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}$, $G \times X \to X$, $((n,x) \mapsto n+x)$.

$$\bar{f}(s) = [2s], \qquad x_0 = 1.$$

[3] $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}$, $G \times X \to X$, $((n,x) \mapsto n+x)$.

$$\bar{f}(s) = [s/2], \qquad x_0 = 0.$$

[4] $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}$, $G \times X \to X$, $((n,x) \mapsto n+x)$.

$$\bar{f}(s) = [2s/3], \qquad x_0 = 2.$$

[5] $G = \mathbb{Z}^2$, $X = \mathbb{R}^2$, $G \times X \to X$, $((m,n,x,y) \mapsto (m+x, n+y))$.

$$\bar{f}(s) = [2s, 3s], \qquad x_0 = (1,1).$$

[6] $G = \mathbb{Z}^2$, $X = \mathbb{R}^2$, $G \times X \to X$, $((m,n,x,y) \mapsto (m+x, n+y))$.

$$\bar{f}(s) = [s/2, s/3], \qquad x_0 = (1,-1).$$

[7] $G = \mathbb{Z}_2$, $X = S^1$, $G \times X \to X$, $((\zeta, z) \mapsto \zeta z)$.

$$\bar{f}(s) = [\exp 4\pi is], \qquad x_0 = 1.$$

[8] $G = \mathbb{Z}_2$, $X = S^1$, $G \times X \to X$, $((\zeta, z) \mapsto \zeta z)$.

$$\bar{f}(s) = [\exp 2\pi is], \qquad x_0 = -1.$$

[9] $G = \mathbb{Z}_2$, $X = S^3$, $G \times X \to X$, $((\zeta, z_1, z_2) \mapsto (\zeta z_1, \zeta z_2))$.

$$\bar{f}(s) = [\exp \pi is, 0], \qquad x_0 = (-1, 0).$$

[10] $G = \mathbb{Z}_2$, $X = S^3$, $G \times X \to X$, $((\zeta, z_1, z_2) \mapsto (\zeta z_1, \zeta z_2))$.

$$\bar{f}(s) = [\cos 2\pi s, \sin 2\pi s], \qquad x_0 = (1,0).$$

以上.

解答

問題 1. 以下はホモトピーを与える写像の例である．他の写像であっても, (i) 定義域と値域が正しい, (ii) 連続である, (iii) f_0 と f_1 をつないでいる, の三点を満たしていれば答えとなる．

$$
\begin{aligned}
&[1] \quad F(s,t) = (\cos\frac{\pi(2t-1)}{2}\cos\pi s, \cos\frac{\pi(2t-1)}{2}\sin\pi s, \sin\frac{\pi(2t-1)}{2}),\\
&[2] \quad F(s,t) = (\sqrt{(2s-1)^2+1}\cos 2\pi s, \sqrt{(2s-1)^2+1}\sin 2\pi s, 2s-1),\\
&[3] \quad F(s,t) = (t\cos 2\pi s, t\sin 2\pi s, t),\\
&[4] \quad F(s,t) = ((4+\cos 2\pi s)\cos\pi t, (4+\cos 2\pi s)\sin\pi t, \sin 2\pi s).
\end{aligned}
$$

問題 2. 以下はホモトピーの例である．問題 1 で注意した点に加えて, (iv) A を動かさない, という条件を満たすものは正しい答えである．

$$
\begin{aligned}
&[1] \quad F(s,t) = (ts, t^2s^2),\\
&[2] \quad F(s,t) = (\sqrt{1+t^2\sin^2\pi s}\cos 2\pi s, \sqrt{1+t^2\sin^2\pi s}\sin 2\pi s, t\sin\pi s),\\
&[3] \quad F(s,t) = (\cos\pi s, (1-2t)\sin\pi s, 1+4t(t+1)\sin^2\pi s),\\
&[4] \quad F(s,t) = (\cos\pi s, \frac{2s-1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{s(1-s)}\sin\pi s),\\
&[5] \quad F(x,t) = (x, 2tx),\\
&[6] \quad F(x,t) = (x, tx+y, ty),\\
&[7] \quad F(x,t) = \begin{cases} f_0((1-2t)x), & (0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1/2) \\ f_1((2t-1)x), & (0 \le x \le 1, 1/2 \le t \le 1) \end{cases}\\
&[8] \quad F(s,t) = \begin{cases} (\cos\pi(1-2t)s, \sin\pi(1-2t)s), & (0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1/2) \\ (\cos\pi(2t-1)s, \sin\pi(2t-1)s). & (0 \le x \le 1, 1/2 \le t \le 1) \end{cases}
\end{aligned}
$$

問題 3. 一般に, 位相空間 X から pt への連続写像はただ一つしかなく, それは X の点をすべて pt の 1 点に移すものである．その写像がレトラクト $r : X \to \mathrm{pt}$ となる．以下は $i \circ r \simeq 1_X$ を与えるホモトピー H の例である．(ここで $i : \mathrm{pt} \to X$ は包含写像である.)

$$
\begin{aligned}
&[1] \quad H(x,t) = tx,\\
&[2] \quad H(x,x^2,t) = (tx, t^2x^2),\\
&[3] \quad H(x,0,t) = (tx, 0),\\
&[4] \quad H(x,2x,t) = (tx, 2tx),\\
&[5] \quad H(x,y,0,t) = (tx, ty, 0),\\
&[6] \quad H(x,y,z,t) = (tx, ty, tz).
\end{aligned}
$$

問題 4. 以下, $f : X \to Y$ と $g : Y \to X$ が, X と Y のホモトピー同値を与える写像の例である．また, 参考のため, $g \circ f \simeq 1_X$ を与えるホモトピー $H_X : X \times [0,1] \to X$ および $f \circ g \simeq 1_Y$ を与えるホモトピー $H_Y : Y \times [0,1] \to X$ も与えてある．また, 以下では pt の唯一の要素を p と書くことにする: $\mathrm{pt} = \{p\}$.

$$
\begin{aligned}
&[1] \quad f(p) = (1,0,0),\\
&\qquad g(\cos\theta, \sin\theta, \theta) = p,\\
&\qquad H_X(p,t) = p,
\end{aligned}
$$

$H_Y(\cos\theta, \sin\theta, \theta, t) = (\cos t\theta, \sin t\theta, t\theta)$.

[2] $f(x, y, z) = p$,
$g(p) = (0, 0, 1)$,
$H_X(x, y, z, t) = (tx, ty, \sqrt{1 - t^2x^2 - t^2y^2})$
$H_Y(p, t) = p$.

[3] $f(x, y) = (4 + x, 0, y)$,
$g((4 + \cos\theta)\cos\varphi, (4 + \cos\theta)\sin\varphi, \sin\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$,
$H_X(x, y, t) = (x, y)$,
$H_Y((4 + \cos\theta)\cos\varphi, (4 + \cos\theta)\sin\varphi, \sin\theta, t)$
$= (4 + \cos\theta)\cos t\varphi, (4 + \cos\theta)\sin t\varphi, \sin\theta)$.

[4] $f(p) = (0, 0)$,
$g(x, y) = p$,
$H_X(p, t) = p$,
$H_Y(x, y, t) = (tx, ty)$.

[5] $f(x) = (x, 0, 0)$,
$g(x, y, z) = x$,
$H_X(x, t) = x$,
$H_Y(x, y, z, t) = (x, ty, tz)$.

問題 5. 被覆 $p : \tilde{X} \to X$ に対して, 道 $f : [0, 1] \to X$ の持ち上げ $\tilde{f} : [0, 1] \to \tilde{X}$ とは, $p \circ \tilde{f} = f$ を満たす写像のことである. 始点についての条件 $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ にもとで, 持ち上げ $\tilde{f}$ はただ一つしかない.

[1] $\tilde{f}(s) = 3s$.

[2] $\tilde{f}(s) = -s + 1$.

[3] $\tilde{f}(s) = \dfrac{s}{2} - 1$.

[4] $\tilde{f}(s) = \dfrac{s}{8} + \dfrac{1}{2}$.

[5] $\tilde{f}(s) = \dfrac{s}{4}$.

[6] $\tilde{f}(s) = (s + 1, 2s)$.

[7] $\tilde{f}(s) = (s + 1, \dfrac{3s}{2} - 1)$.

[8] $\tilde{f}(s) = (\dfrac{s}{2}, 2s + 1)$.

[9] $\tilde{f}(s) = (\dfrac{s}{6}, -\dfrac{2s}{5})$.

[10] $\tilde{f}(s) = (\dfrac{s}{2} + 2, 2s + 2)$.

[11] $\tilde{f}(s) = \exp \pi i s$.

[12] $\tilde{f}(s) = \exp \dfrac{\pi i s}{6}$.

[13] $\tilde{f}(s) = -\exp 2\pi i s$.

[14] $\tilde{f}(s) = -\exp \dfrac{-\pi i s}{5}$.

[15] $\tilde{f}(s) = \exp \dfrac{2\pi i s}{3}$.

[16] $\tilde{f}(s) = \exp \dfrac{\pi(s + 1)}{4}$.

[17] $\tilde{f}(s) = \exp \dfrac{\pi i s(2 - s)}{3}$.

[18] $\tilde{f}(s) = \exp \dfrac{2\pi i s(s + 1)}{3}$.

[19] $\tilde{f}(s) = \begin{cases} s, & (0 \le s \le \frac{1}{2}) \\ 3s - 1. & (\frac{1}{2} \le s \le 1) \end{cases}$

[20] $\tilde{f}(s) = \begin{cases} s + 1, & (0 \le s \le \frac{1}{2}) \\ -s + 2. & (\frac{1}{2} \le s \le 1) \end{cases}$

問題 6.

[1] $f(s) = s.$

[2] $f(s) = 2s + 1.$

[3] $f(s) = \dfrac{s}{2}.$

[4] $f(s) = \dfrac{2s}{3} + 2.$

[5] $f(s) = (s + 1, 3s + 1).$

[6] $f(s) = (\dfrac{s}{2} + 1, \dfrac{s}{3} - 1).$

[7] $f(s) = \exp 4\pi i s.$

[8] $f(s) = -\exp 2\pi i s.$

[9] $f(s) = (-\exp \pi i s, 0).$

[10] $f(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s).$