

トポロジー 演習問題 (2017年7月19日)

- 問題 1. 単体複体 $K = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\}$ に対し, $E(K, 0) \cong \mathbb{Z}$ を証明せよ. (ヒント: 0 を基点とする閉じた辺の道 ζ に対して, ζ と同値な道 ζ' であって, ζ' を構成する辺の個数が最小のものを考える.)
- 問題 2. n 次元単体 K の頂点 $v, v' \in V(K)$ が与えられたとする. K の辺の道 ζ であって v を始点とし v' を終点とするものは, (v, v') に同値であることを示せ. (ヒント: 辺の個数についての数学的帰納法.)
- 問題 3. n 次元単体 K に対し, $E(K, v) = \{1\}$ を証明せよ.
- 問題 4. 単体複体 K の頂点 $v, v' \in V(K)$ に対して, v を始点とし v' を終点とする辺の道 ζ があったとする. このとき, $E(K, v)$ と $E(K, v')$ は同型であることを示せ.
- 問題 5. 単体写像 $\varphi: K_1 \rightarrow K_2$ が与えられたとする. K_1 の道
- $$\zeta = (v_0, v_1)(v_1, v_2) \cdots (v_{n-1}, v_n)$$
- に対して, K_2 の道 $\varphi_*\zeta$ を
- $$\varphi_*\zeta = (\varphi(v_0), \varphi(v_1))(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) \cdots (\varphi(v_{n-1}), \varphi(v_n))$$
- で定める.
- (a) 写像 $\varphi_*: E(K_1, v) \rightarrow E(K_2, \varphi(v))$, ($[\zeta] \mapsto [\varphi_*\zeta]$) は矛盾なく定義された準同型であることを示せ.
- (b) 別の単体写像 $\psi: K_2 \rightarrow K_3$ が与えられたとき, $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ が成り立つことを示せ.

以上.

解答例

問題 1. 0 を基点とする K の閉じた辺の道 ζ が与えられたとする. ζ と同値な道であって, それを構成する辺の個数が最小のものを ζ' とする. 辺の道 η と η^{-1} を $\eta = (0, 1)(1, 2)(2, 0)$ および $\eta^{-1} = (0, 2)(2, 1)(1, 0)$ で定める. このとき, ζ' は, $\zeta' = \eta^n$, ($n \in \mathbb{Z}$) という形をしていることが示せれば, $[\zeta] = [\eta^n] \mapsto n$ によって同型写像 $E(K, 0) \rightarrow \mathbb{Z}$ が得られることになる. 以下, ζ' がそのような形をしていることを示す: まず ζ' の最初の辺は $(0, v)$ という形をしている.

- (1) もし $v = 0$ であれば, $n = 0$ の場合である.
- (2) もし $v = 1$ の場合には二番目の辺があり, $\zeta' = (0, 1)(1, w)(w, w') \cdots$ という形をしている. $w = 0, 1$ の場合には, $\zeta' \sim (0, w)(w, w') \cdots$ となり ζ' の辺の個数が最小であるという仮定に矛盾する. 従って $w = 2$ である. これより ζ' は三番目の辺を持ち, $\zeta' = (0, 1)(1, 2)(2, x)(x, x') \cdots$ という形をしている. もし $x = 1, 2$ であれば, ζ' はより辺の個数が少ない辺の道に同値であり, ζ' の仮定に矛盾する. 従って, $x = 0$ であり, ζ' のはじめの三つの辺は η になっていることがわかる. もし ζ' に辺が三つしか含まれていなければ, $n = 1$ の場合である. もし ζ' に四つ以上の辺が含まれている場合, 上と同様の議論により, $\zeta' = \eta(0, 1) \cdots$ という形でなければならない. 従って, 上の議論を繰り返すことができ, ζ' の辺の個数は 3 の倍数で, $3n$ 個の辺が含まれている場合には, $\zeta' = \eta^n$ の形であることがわかる.
- (3) もし $v = 2$ の場合には, 上と同様の議論により, ζ' の辺の個数は 3 の倍数で, $3n$ 個の辺が含まれている場合には, $\zeta' = \eta^{-n}$ の形であることがわかる.

問題 2. ζ を構成する辺の個数 N についての数学的帰納法で証明する. 個数が $N = 1$ のとき, $\zeta = (v, v')$ というのであるから, ζ は (v, v') に明らかに同値である. v を始点とし v' を終点とする辺の道であって, それを構成する辺の個数が $N - 1$ のものは, (v, v') に同値であると仮定する. ζ が v を始点とし v' を終点とする辺の道であって, ζ を構成する辺の個数が N 個のものだとする. このとき ζ の最初の辺に注目すると, 次の形になっている:

$$\zeta = (v, v_1)(v_1, v_2)(v_2, v_3) \cdots$$

v, v_1, v_2 について, 場合分けして考える:

- (1) $v = v_1$ のとき, $\zeta = (v, v)(v, v_2)(v_2, v_3) \cdots \sim (v, v_2)(v_2, v_3) \cdots$ である.
- (2) $v = v_2$ のとき, $\zeta = (v, v_1)(v_1, v)(v, v_3) \cdots \sim (v, v)(v, v_3) \cdots$ である.
- (3) $v_1 = v_2$ のとき, $\zeta = (v, v_1)(v_1, v_1)(v_1, v_3) \cdots \sim (v, v_1)(v_1, v_3) \cdots$ である.
- (4) 上のいずれでもないとき, すなわち, v, v_1, v_2 が互いに異なる頂点であるとき, $\{v, v_1, v_2\}$ は K の単体であるので, $\zeta \sim (v, v_2)(v_2, v_3) \cdots$ である.

いずれの場合でも, ζ は辺の個数が $N - 1$ 個の辺の道に同値であるので, 帰納法の仮定より, (v, v') に同値である. v を始点とし v' を終点とする任意の辺の道は (v, v') に同値である.

問題 3. 問題 2 の結果から, v を基点とする任意の閉じた辺の道 ζ は, $E(K, v)$ の単位元を代表する辺の道 (v, v) に同値である.

問題 4. v' を始点として v を終点とする辺の道を η とする. v を基点とする辺の道 ζ に対して, $\eta\zeta\eta^{-1}$ は v' を基点とする辺の道である. 逆に, v' を基点とする辺の道 ζ' に対して, $\eta^{-1}\zeta'\eta$ は v を基点とする辺の道である. これを踏まえて, 次の写像を考える:

$$\begin{aligned}\alpha : E(K, v) &\rightarrow E(K, v'), & [\zeta] &\mapsto [\eta\zeta\eta^{-1}], \\ \alpha' : E(K, v') &\rightarrow E(K, v), & [\zeta'] &\mapsto [\eta^{-1}\zeta'\eta].\end{aligned}$$

α と α' は, いずれも矛盾なく定義された準同型写像で, 互いの逆写像になっていることが確かめられる. 従って, $E(K, v) \cong E(K, v')$ である.

問題 5.

(a) φ は単体写像であるので, (v, v') が K_1 の辺であれば $(\varphi(v), \varphi(v'))$ は K_2 の辺である. また, ある単体 $s = \{v_0, \dots, v_q\} \in K_1$ に対して, $v, v', v'' \in s$ であれば, $\varphi(s) = \{\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_q)\}$ は K_2 の単体であり, $\varphi(v), \varphi(v'), \varphi(v'') \in \varphi(s)$ である. これらから, φ_* は同値な辺の道を同値な辺の道に移すので, $\varphi_* : E(K_1, v) \rightarrow E(K_2, \varphi(v))$ は矛盾なく定義されている. v を基点とする閉じた辺の道 ζ と ζ' に対して, 明らかに $\varphi_*(\zeta\zeta') = \varphi_*(\zeta)\varphi_*(\zeta')$ が成り立つので, $\varphi_* : E(K_1, v) \rightarrow E(K_2, \varphi(v))$ は準同型写像である.

(b) 定義から,

$$(\psi \circ \varphi)_*((v_0, v_1) \cdots) = \psi((\varphi(v_0), \varphi(v_1)) \cdots)$$

が成り立つので, K_1 の任意の辺の道 ζ に対して, $(\psi \circ \varphi)_*\zeta = \psi_*(\varphi_*\zeta)$ である. すなわち, $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ である. 従って, $\varphi_* : E(K_1, v) \rightarrow E(K_2, \varphi(v))$ と $\psi_* : E(K_2, \varphi(v)) \rightarrow E(K_3, \psi(\varphi(v)))$ に対しても, $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ が成り立つ.