# トポロジー 演習問題 (2018 年 4 月 17 日)

以下, $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} |\ x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ とする.

問題 1. 位相空間の間のホモトピー同値が, 同値関係であることを証明せよ.

問題 2. 以下の部分空間 $A \subset X$ が強変形レトラクトであることを, レトラクションを構成して示せ.

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $A = \{(0, \cdots, 0)\}$, | $X = \mathbb{R}^n$. |
| (2) | $A = \mathbb{R}^n \times \{0\}$, | $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. |
| (3) | $A = \{\pm 1\}$, | $X = \mathbb{R} - \{0\}$. |
| (4) | $A = S^n$, | $X = \mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}$. |
| (5) | $A = \{(0,0)\}$ | $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^4 + y^4 \leq 1\}$. |
| (6) | $A = S^1$, | $X = S^1 \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 |\ 1 \leq x \leq 2\}$. |
| (7) | $A = \mathbb{R} \times \{0\}/\sim$, | $X = \mathbb{R} \times [-1,1]/\sim$. |

ただし, (7) における同値関係 $\sim$ は以下で定義する:

$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x \in \mathbb{Z}, \\ y' = (-1)^{x'-x} y. \end{cases}$$

問題 3. $X$ を位相空間, $Y$ を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とし, $f, g : X \to Y$ を連続写像とする.

(a) 各点 $x \in X$ に対して, $f(x)$ と $g(x)$ を結ぶ線分が $Y$ に含まれるとする. このとき, $f$ と $g$ はホモトピックであることを示せ.

(b) 任意の連続写像 $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ はホモトピックであることを示せ.

問題 4. $X$ を任意の位相空間とし, 連続写像 $f, g : X \to S^n$ は, 任意の $x \in X$ に対して $f(x) \neq -g(x)$ を満たすとする.

(a) 任意の $x \in X$ と $t \in [0,1]$ に対し, $\|(1-t)f(x) + tg(x)\| \neq 0$ を示せ. ただし, $v = (v_1, \dots, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して, $\|v\|$ は次で定める.

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_{n+1}^2}$$

(ヒント: 任意の $v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対し $\|v - w\| \geq |\|v\| - \|w\||$ が成り立つ.)

(b) $f$ と $g$ はホモトピックであることを示せ.

以上.

---

http://math.shinshu-u.ac.jp/~kgomi/class/index.html.

解答例

問題 1. 対称律の証明だけ与える: $X$ と $Y$ がホモトピー同値であるということは, 連続写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to X$ であって, $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ と $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ を満たすものが存在することだった. 従って, 連続写像 $g : Y \to X$ と $f : X \to Y$ であって, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ と $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ を満たすものが存在する. すなわち, $Y$ と $X$ はホモトピー同値である.

問題 2. 包含写像を $i : A \to X$ とする. レトラクション $r : X \to A$ と, $i \circ r \simeq_A \mathrm{id}_X$ を与えるホモトピー $H : X \times [0,1] \to X$ の例は以下のとおりである.

(1) $r(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$, $\quad H(x_1, \ldots, x_n, t) = (tx_1, \ldots, tx_n)$.

(2) $r(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$, $\quad H(x_1, \ldots, x_{n+1}, t) = (x_1, \ldots, x_n, tx_{n+1})$.

(3) $r(x) = \dfrac{x}{|x|}$, $\quad H(x,t) = \dfrac{x}{|x|^t}$.

(4) $r(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$, $\quad H(x,t) = \dfrac{x}{\|x\|^t}$.

(5) $r(x,y) = (0,0)$, $\quad H(x,y,t) = (tx, ty)$.

(6) $r(x,y) = \begin{cases} (x,y), & ((x,y) \in \overline{S^1}) \\ (1,0), & ((x,0) \in \overline{X - S^1}). \end{cases}$ $\quad H(x,y,t) = \begin{cases} (x,y), & ((x,y) \in \overline{S^1}) \\ (t(x-1)+1, 0), & ((x,0) \in \overline{X - S^1}). \end{cases}$

(7) $r([x,y]) = [x,0]$, $\quad H([x,y],t) = [x, ty]$.

問題 3.

(a) $f(x)$ と $g(x)$ を結ぶ線分が $Y$ に含まれるということは, 任意の $x \in X$ と $t \in [0,1]$ に対して, $(1-t)f(x) + tg(x) \in Y$ となることである. 従って, 次の連続写像が矛盾なく定義される.

$$H : X \times [0,1] \to Y, \qquad H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

この $H$ は $f$ から $g$ へのホモトピーである.

(b) $Y = \mathbb{R}^n$ とすると, 任意の $f, g : X \to Y = \mathbb{R}^n$ に対して (a) の条件が成立する. 従って, $f$ と $g$ はホモトピックである.

問題 4.

(a) $\|\ \ \|$ の性質と, $\|f(x)\| = \|g(x)\| = 1$ より次を得る:

$$\begin{aligned}\|(1-t)f(x) + tg(x)\| &\geq \big|\|(1-t)f(x)\| - \|tg(x)\|\big| \\ &= \big|(1-t)\|f(x)\| - t\|g(x)\|\big| = |(1-t) - t| = |1-2t|.\end{aligned}$$

従って, $t \neq 1/2$ であれば, $\|(1-t)f(x) + tg(x)\| \neq 0$ である. $t = 1/2$ のとき,

$$\|(1-t)f(x) + tg(x)\| = \frac{1}{2}\|f(x) + g(x)\|$$

となるので, 問題の仮定より, これも 0 ではない. (一般に $\|v\| = 0$ となるのは $v = 0$ のときに限る.)

(b) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に注意すると, $f$ と $g$ の間のホモトピーを以下で与えることができる:

$$H : X \times [0,1] \to S^n, \qquad H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|}.$$