トポロジー 演習問題 (2018 年 4 月 25 日)

問題 1. 二次元円板 $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 \le 1\}$ の中の, $x_0 = (1,0) \in D^2$ を基点とする次の二つの閉道が同値であることを示せ.

$$f : [0,1] \to D^2, \qquad f(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s),$$
$$c_{x_0} : [0,1] \to D^2, \qquad c_{x_0}(s) = x_0.$$

問題 2. 二次元球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ の中の, 次の二つの道が同値であることを示せ.

$$f_0 : [0,1] \to S^2, \qquad f_0(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s, 0),$$
$$f_1 : [0,1] \to S^2, \qquad f_1(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s, 0).$$

問題 3. n を整数とする. 円周 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 = 1\}$ の中の, $x_0 = (1,0)$ を基点とする閉道 f_n を $f_n(s) = (\cos 2\pi ns, \sin 2\pi ns)$ で定める. このとき, 以下が成り立つことを示せ.

(a) $f_2 = f_1 * f_1$.

(b) $\overline{f_n} = f_{-n}$.

問題 4. 位相空間 X の任意の道 $f : [0,1] \to X$ に対し, $f * c_{f(1)} \sim f$ を示せ. ここで, $c_{f(1)} : [0,1] \to X$ は $c_{f(1)}(s) = f(1)$ と定めた道である.

問題 5. 位相空間 X の任意の道 $f : [0,1] \to X$ に対し, $\bar{f} * f \sim c_{f(1)}$ を示せ. ここで, $\bar{f} : [0,1] \to X$ は $\bar{f}(s) = f(1-s)$ と定めた道である.

問題 6. 位相空間 X の任意の道 f, g に対し, $\overline{f * g} \sim \bar{g} * \bar{f}$ を示せ.

問題 7. $0 = \sigma_0 \le \sigma_1 \le \sigma_2 = 1$ とする. 位相空間 X の道 $f : [0,1] \to X$ に対して, 道 f_1 と f_2 を次のように定める.

$$f_1(s) = f((1-s)\sigma_0 + s\sigma_1), \qquad f_2(s) = f((1-s)\sigma_1 + s\sigma_2).$$

このとき, $f_1 * f_2 \sim f$ を示せ.

問題 8. $0 = \sigma_0 \le \sigma_1 \le \sigma_2 \le \cdots \le \sigma_n = 1$ とする. 位相空間 X の道 $f : [0,1] \to X$ に対して, 道 f_i, $(i = 1, \ldots, n)$ を次のように定める.

$$f_i(s) = f((1-s)\sigma_{i-1} + s\sigma_i).$$

このとき, $(\cdots(((f_1 * f_2) * f_3) * f_4) * \cdots) * f_{n-1}) * f_n \sim f$ を示せ.

問題 9. 位相空間 X が, その開集合 $U, V \subset X$ を用いて $X = U \cup V$ と表せるとする. このとき, X の任意の道 f に対して, 以下の性質を持つ有限個の道 $f_1, \ldots, f_n$ が存在することを示せ.

(a) 各 i に対し, f_i は U の道であるか, V の道であるかのいずれかである.

(b) $(\cdots(((f_1 * f_2) * f_3) * f_4) * \cdots) * f_{n-1}) * f_n \sim f$.

(ヒント: 区間 $[0,1]$ の開被覆 $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ についての Lebesgue 数を考えることで, $0 = \sigma_0 \le \sigma_1 \le \cdots \le \sigma_n = 1$ という実数であって, $f([\sigma_{i-1}, \sigma_i])$ が U または V に含まれるものが存在する.)

以上.

---

http://math.shinshu-u.ac.jp/~kgomi/class/index.html.

解答例

問題 1. 例えば以下のホモトピーにより f と c_{x_0} は同値である:

$$F : [0,1] \times [0,1] \to D^2, \qquad F(s,t) = tx_0 + (1-t)f(s).$$

問題 2. 例えば以下のホモトピーにより f_0 と f_1 は同値である:

$$F : [0,1] \times [0,1] \to S^2, \quad F(s,t) = (\cos \pi s, \sin \pi s \cos \pi t, \sin \pi s \sin \pi t),$$

$$F(s,t) = (\cos \pi s, (1-2t) \sin \pi s, \sqrt{1 - \cos^2 \pi s - (1-2t)^2 \sin^2 \pi s}).$$

問題 3.

(a) $f_1 * f_1$ を具体的に計算する.

$$0 \le s \le \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad (f_1 * f_1)(s) = (\cos 2\pi(2s), \sin 2\pi(2s)) = f_2(s).$$

$$\frac{1}{2} \le s \le 1 \quad \Rightarrow \quad (f_1 * f_1)(s) = (\cos 2\pi(2s-1), \sin 2\pi(2s-1)) = f_2(s).$$

したがって, $f_2 = f_1 * f_1$ である.

(b) $\overline{f_n}$ を具体的に計算する.

$$\overline{f_n}(s) = (\cos 2\pi n(1-s), \sin 2\pi n(1-s)) = (\cos 2\pi(-n)s, \sin 2\pi(-n)s) = f_{-n}(s).$$

問題 4. 連続写像 $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ を以下で定める:

$$H(s,t) = \begin{cases} f(\frac{2s}{t+1}), & (0 \le s \le \frac{t+1}{2}) \\ f(1). & (\frac{t+1}{2} \le s \le 1) \end{cases}$$

この H により, $f * c_{f(1)} \sim f$ が示される.

問題 5. 連続写像 $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ を以下で定める:

$$H(s,t) = \begin{cases} f(1 - 2s(1-t)), & (s,t) \in [0,1/2] \times [0,1] \\ f(2s(1-t) - 1 + 2t). & (s,t) \in [1/2,1] \times [0,1] \end{cases}$$

この H により, $\bar{f} * f \sim c_{f(1)}$ が示される.

問題 6. 定義に従って $\overline{f * g}$ と $\bar{g} * \bar{f}$ を書き下すと,

$$\overline{f * g}(s) = \bar{g} * \bar{f}(s) = \begin{cases} g(1-2s), & (0 \le s \le \frac{1}{2}) \\ f(2-2s), & (\frac{1}{2} \le s \le 1) \end{cases}$$

となるので, たしかに $\overline{f * g} \sim \bar{g} * \bar{f}$ である.

問題 7. 道 $f_1 * f_2$ を具体的に表示すると次のようになる.

$$(f_1 * f_2)(s) = \begin{cases} f(2s\sigma_1), & (0 \le s \le \frac{1}{2}) \\ f(2\sigma_1(1-s) + 2s - 1). & (\frac{1}{2} \le s \le 1) \end{cases}$$

特に, $\sigma_1 = 1/2$ のとき, $f_1 * f_2 = f$ である. これに注目して, 連続写像 $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ を以下のように定める:

$$H(s,t) = \begin{cases} f(2s((1-t)\sigma_1 + \frac{t}{2})), & ((s,t) \in [0,1/2] \times [0,1]) \\ f(2((1-t)\sigma_1 + \frac{t}{2})(1-s) + 2s - 1). & ((s,t) \in [1/2,1] \times [0,1]) \end{cases}$$

この H により, $f_1 * f_2 \simeq f$ となる.

問題 8. $0 \leq \sigma \leq \sigma' \leq 1$ を満たす σ, σ' に対して, 道 $f_{\sigma,\sigma'}$ を以下のように定める.

$$f_{\sigma,\sigma'}(s) = f((1-s)\sigma + s\sigma').$$

さらに, $0 \leq \sigma' \leq \sigma'' \leq 1$ を満たす σ'' が与えられたとき, $f_{\sigma,\sigma'} * f_{\sigma',\sigma''} \sim f_{\sigma,\sigma''}$ が成り立つ. 実際, $\sigma' = (\sigma+\sigma'')/2$ のとき, $f_{\sigma,\sigma'} * f_{\sigma',\sigma''} = f_{\sigma,\sigma''}$ であることに注意すれば, 以下で定めるホモトピー $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ によって, この同値を与えることができる.

$$H(s,t) = \begin{cases} f((1-2s)\sigma + 2s((1-t)\sigma' + t\frac{\sigma+\sigma''}{2})), & ((s,t) \in [0,\frac{1}{2}] \times [0,1]) \\ f(2(1-s)((1-t)\sigma' + t\frac{\sigma+\sigma''}{2}) + (2s-1)\sigma''). & ((s,t) \in [\frac{1}{2},1] \times [0,1]) \end{cases}$$

以上と $f_i = f_{\sigma_{i-1},\sigma_i}$ および $f_{\sigma_0,\sigma_1} = f$ より,

$$\begin{aligned} &(\cdots(((f_1 * f_2) * f_3) * f_4) * \cdots) * f_n \\ &\quad = (\cdots(((f_{\sigma_0,\sigma_1} * f_{\sigma_1,\sigma_2}) * f_{\sigma_2,\sigma_3}) * f_{\sigma_3,\sigma_4}) * \cdots) * f_{\sigma_{n-1},\sigma_n} \\ &\quad \sim (\cdots((f_{\sigma_0,\sigma_2} * f_{\sigma_2,\sigma_3}) * f_{\sigma_3,\sigma_4}) * \cdots) * f_{\sigma_{n-1},\sigma_n} \\ &\quad \sim (\cdots(f_{\sigma_0,\sigma_3} * f_{\sigma_3,\sigma_4}) * \cdots) * f_{\sigma_{n-1},\sigma_n} \\ &\qquad \vdots \\ &\quad \sim f_{\sigma_0,\sigma_{n-1}} * f_{\sigma_{n-1},\sigma_n} \sim f_{\sigma_0,\sigma_n} = f \end{aligned}$$

となり, 証明すべき同値が得られる.

問題 9. 区間 $[0,1]$ の開被覆 $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ についての Lebesgue 数を δ とする. 自然数 n を, $1/n < \delta$ となるように選ぶ. $i = 1, \ldots, n$ に対して, $\sigma_i = i/n$ とすると, $0 = \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_n = 1$ である. δ は Lebesgue 数だったので, σ_i を中心とする δ 開近傍は $f^{-1}(U)$ か $f^{-1}(V)$ に含まれる. 従って, $f([\sigma_{i-1}, \sigma_i])$ は U または V に含まれる. この $[0,1]$ 区間の分割に対して問題 8 の結果を使えば, 問題 9 の性質を持つ f_i が得られる.