トポロジー 演習問題 (2018 年 5 月 2 日)

問題 1. 自然数 p に対して, $\zeta = \exp \frac{2\pi i}{p} \in \mathbb{C}$ とする. 集合 $\mathbb{Z}_p = \{\zeta^k \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ は, 以下の積・単位元・逆元により, 群になることを確かめよ. また, $p = 4, 5$ の場合に演算表を作れ.

$$\begin{cases} \text{積} & \zeta^k \cdot \zeta^\ell = \zeta^{k+\ell}. \\ \text{単位元} & \zeta^0 = 1. \\ \text{逆元} & (\zeta^k)^{-1} = \zeta^{-k}. \end{cases}$$

問題 2. n 次対称群 S_n が群であることを示せ.

問題 3. 以下の行列のなす集合が, 行列の積について群をなすことを示せ. ただし $K = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ であるとする.

(a) 一般線形群 $GL(n, K) = \{A \in M(n, K) \mid \det A \neq 0\}$.
(b) 特殊線形群 $SL(n, K) = \{A \in M(n, K) \mid \det A = 1\}$.
(c) 直交群 $O(n) = \{T \in M(n, \mathbb{R}) \mid {}^tTT = E\}$.
(d) ユニタリー群 $U(n) = \{U \in M(n, \mathbb{C}) \mid U^*U = E\}$.

問題 4. 群 G から群 H への任意の準同型 $f : G \to H$ は, G の単位元を H の単位元に移すことを示せ.

問題 5. 以下の群 G, H に対して, すべての準同型写像 $f : G \to H$ を求めよ.

(a) $G = \mathbb{Z}_2$, $H = \mathbb{Z}_4$.
(b) $G = \mathbb{Z}_4$, $G = \mathbb{Z}_2$.
(c) $G = S_3$, $H = \mathbb{Z}_2$.
(d) $G = \mathbb{Z}_2$, $H = S_3$.

問題 6. 群 G, H に対して, 直積集合 $G \times H$ に積を

$$(g, h) \cdot (g', h') = (g \cdot g', h \cdot h')$$

と定めると, $G \times H$ は群になることを示せ.

問題 7. 以下の主張を示せ.

(a) $\mathbb{Z}_4$ と $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ は同型な群ではない.
(b) $\mathbb{Z}_6$ と $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ は同型な群である.

以上.

---

http://math.shinshu-u.ac.jp/~kgomi/class/index.html.

解答例

問題 1. 群の公理を満たすことを確かめる: $\zeta^k, \zeta^\ell, \zeta^m \in \mathbb{Z}_p$ に対して,

$$(\zeta^k \cdot \zeta^\ell) \cdot \zeta^m = \zeta^{k+\ell} \cdot \zeta^m = \zeta^{k+\ell+m} = \zeta^k \cdot \zeta^{\ell+m} = \zeta^k \cdot (\zeta^\ell \cdot \zeta^m)$$

となるので, 積は結合律を満たす. 単位元について,

$$1 \cdot \zeta^k = \zeta^{0+k} = \zeta^k = \zeta^{k+0} = \zeta^k \cdot 1$$

なので, たしかに $1 \in \mathbb{Z}_p$ は単位元となっている. 最後に,

$$(\zeta^k)^{-1} \cdot \zeta^k = \zeta^{-k+k} = 1 = \zeta^{k-k} = \zeta^k \cdot (\zeta^k)^{-1}$$

なので, $\mathbb{Z}_p$ の任意の元は逆元を持つことがわかる.

$\mathbb{Z}_4$ と $\mathbb{Z}_5$ の演算表は以下のとおり:

$g \cdot h$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

$g \cdot h$	ζ^0	ζ^1	ζ^2	ζ^3	ζ^4
ζ^0	ζ^0	ζ^1	ζ^2	ζ^3	ζ^4
ζ^1	ζ^1	ζ^2	ζ^3	ζ^4	ζ^0
ζ^2	ζ^2	ζ^3	ζ^4	ζ^0	ζ^1
ζ^3	ζ^3	ζ^4	ζ^0	ζ^1	ζ^2
ζ^4	ζ^4	ζ^0	ζ^1	ζ^2	ζ^3

問題 2. S_n は集合 $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ の全単射 $\sigma : X_n \to X_n$ からなる. 積は全単射の合成によって与えられるので, 結合律を満たす. 単位元は恒等写像からなるので, 単位元の性質を持っている. 逆元は, 逆写像によって与えられるので, たしかに逆元の性質を持っている.

問題 3. (a) の場合のみ示す. 行列 $A, B \in GL(n, K)$ に対して, それらの積の行列式は $\det(AB) = (\det A)(\det B) \neq 0$ であるので, $AB \in GL(n, K)$ となっている. 行列の積は明らかに結合律を満たす. 単位行列 E は $\det E = 1 \neq 0$ なので $E \in GL(n, K)$ であり, 明らかに単位元の性質を持っている. また, $A \in GL(n, K)$ に対して, $\det A \neq 0$ より, 逆行列 A^{-1} が存在する. $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} \neq 0$ なので $A^{-1} \in GL(n, K)$ であり, 逆行列はたしかに逆元の性質を持っている.

問題 4. 便宜上 G と H の単位元をそれぞれ e_G, e_H と書く. 定義より, 単位元 $e_G \in G$ は, 任意の $g \in G$ に対して $ge_G = g$ を満たす. f が準同型であれば, $f(g) = f(ge_G) = f(g)f(e_G)$ となる. この式の両辺に左から $f(g) \in H$ の逆元をかけると, $e_H = f(e_G)$ となる.

問題 5.

(a) $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ が準同型であれば, 問題 4 より $f(1) = 1$ である. したがって, $f(-1) \in \mathbb{Z}_4$ を決めれば写像としての f が定まることになる. f が準同型であれば, $f(-1)f(-1) = f((-1)(-1) = f(1) = 1$ である. 従って, $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ が準同型であるには, $f(-1) = \pm 1$ でなければならない. 逆にこのとき, f は準同型であることが確かめられる. したがって, ありうる準同型 $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ は $f(\pm 1) = 1$ と $f(\pm 1) = \pm 1$ の二つである.

(b) $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$ が準同型であれば, $f(i^k) = f(i)^k$ であるので, $f(i) \in \mathbb{Z}_2$ を決めれば写像としての f が定まることになる. ありうる可能性は, $f(i) = \pm 1$ の二種類である. いずれの場合も $f(i^k i^\ell) = (\pm 1)^k (\pm 1)^\ell = (\pm 1)^{k+\ell} = f(i^{k+\ell})$ なので準同型である. したがって, ありうる準同型 $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ は $f(i^k) = (\pm 1)^k$ の二つである.

(c) S_3 は, 恒等置換 1, 互換 (12), (23), (13), および巡回置換 (123), (132) の 6 つの要素からなる. $f : S_3 \to \mathbb{Z}_2$ が準同型であれば, $f(1) = 1$ である. そのほかの要素の行き先を決めることで, 写像としての $f : S_3 \to \mathbb{Z}_2$ が定まる. ここで巡回置換 $\sigma = (123), (132)$ については $\sigma^3 = 1$ であることに注意しよう. $\mathbb{Z}_2$ の要素であって三乗して 1 になる要素は 1 しかない. したがって, f が準同型であるためには, $f((123)) = f((132)) = 1$ でなければならない. すると, 三つの互換の行き先を決めることで f が定まる. $(12)(12) = 1$ であるので, f が準同型であるためには, $f(12) = \pm 1$ のいずれの可能性も許される. 置換についての関係 $(13) = (123)(12)(132)$ を使うと, $f((12)) = f((13))$ である. 同様にして, $f((12)) = f((23))$ である. 以上をまとめると, ありうる準同型 $f : S_3 \to \mathbb{Z}_2$ は, 全ての $\sigma \in S_3$ を単位元に移す自明な準同型と, 符号 $\mathrm{sgn} : S_3 \to \mathbb{Z}_2$ の二つである.

(d) $f : \mathbb{Z}_2 \to S_3$ が準同型であれば $f(1) = 1$ であるので, $f(-1) \in S_3$ を決めれば写像としての f が定まることになる. f が準同型であるためには, $f(-1)f(-1) = 1$ であることが必要十分である. そのような要素は $f(-1) = (12), (13), (23)$ の三つと $f(-1) = 1$ である. これら 4 つが準同型 $f : \mathbb{Z}_2 \to S_3$ のすべてである.

問題 6. $G \times H$ の積が結合律を満たすことは G と H の積の結合律から従う. G と H の単位元を e_G および e_H とすれば, (e_G, E_H) が $G \times H$ の単位元となる. また, $(g, h) \in G \times H$ の逆元は, (g^{-1}, h^{-1}) によって与えられる.

問題 7.

(a) $\mathbb{Z}_4$ は二乗しても単位元ではなく, 四乗して始めて単位元になる要素がある. 一方で, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の任意の元は, 二乗すると単位元になる. これらから, 同型写像 $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ がありえないことが結論できる.

(b) $\zeta = \exp \frac{2\pi i}{6}$ とすると, $\mathbb{Z}_6 = \{1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^5\}$ であり, $\mathbb{Z}_3 = \{1, \zeta^2, \zeta^4\}$ である. 写像 $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ を, $f(\zeta^k) = (-1, \zeta^2)^k = ((-1)^k, \zeta^{2k})$ によって定めると, 同型であることがわかる.