トポロジー 演習問題 (2018 年 5 月 16 日)

問題 1. 以下で与える連続な全射写像 $p : \tilde{X} \to X$ は, 被覆でないことを示せ.

$$(a) \quad \begin{cases} \tilde{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 - y^2 = 0\}, \\ X = \mathbb{R}, \\ p(x, y) = x. \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} \tilde{X} = \mathbb{R}, \\ X = [0, \infty), \\ p(x) = x^2. \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} \tilde{X} = X = \mathbb{C}, \\ p(z) = z^2. \end{cases}$$

以上.

解答例

問題 1. いずれの場合も, $p : \tilde{X} \to X$ が被覆であれば, 任意の点 $x_0 \in X$ に対して, そのある開近傍 $U \subset X$ を見つけて, 次が成り立つようにできる:

- $\tilde{X}$ のある部分集合 $\tilde{U}_j$, $(j \in J)$ を用いて, $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \tilde{U}_j$ と表せる.
- $j, k \in J$ が $j \neq k$ ならば, $U_j \cap U_k = \emptyset$ である.
- 各 $j \in J$ に対して, $p : \tilde{X} \to X$ の制限 $p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \to U$ は同相写像である.

言い換えれば, 上が成り立っていない点 x_0 を見つけることによって, $p : \tilde{X} \to X$ が被覆でないと示せる. 証明の流れとしては, 背理法を用いる. すなわち, $p : \tilde{X} \to X$ が被覆であるとすると, ある点 x_0 に注目して議論を展開することで, 矛盾が生じることを示す.

(a) $p : \tilde{X} \to X$ が被覆だと仮定し, $x_0 = 0$ を考える. すると, 上で述べたような x_0 を含む開近傍 U が存在する. 必要なら U のうちの x_0 を含む連結成分を考え, 改めてそれを U と書くことで, U 自身が連結であると仮定してよい. このとき, U は $\mathbb{R}$ の連結開集合なので, ある開区間 (a, b), $(a < 0 < b)$ と同相である. すると, $U = (a, b)$ の逆像

$$U = (a, b) = \{(x, x), (x, -x) \in \mathbb{R}^2 |\ a < x < b\}$$

は連結である. U 自身も連結であるので, 被覆であるということから従う $p^{-1}(U)$ の表示において, J は一つの要素からなる集合 $J = \{0\}$ で, $p^{-1}(U) = \tilde{U}_0$ であり, $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$ が同相であることになる. $\tilde{U}$ と U が同相であれば, それぞれから p で対応する一点を取り除いた $\tilde{U} \backslash \{(0, 0)\}$ と $U \backslash \{0\}$ が同相であるということになる. 特に, 両者の連結成分の個数は一致する. しかし, $\tilde{U} \backslash \{(0, 0)\}$ の連結成分は 4 つである一方で, $U \backslash \{0\}$ の連結成分は 2 つであり, 矛盾である. 従って, $p : \tilde{X} \to X$ は被覆でない.

(b) $p : \tilde{X} \to X$ が被覆だと仮定し, $x_0 = 0$ を考える. すると, はじめに述べたような x_0 を含む開近傍 U が存在する. すると, $p^{-1}(U)$ は空ではない開集合なので, ある点 $y \in p^{-1}(U)$ であって $p(y) \neq 0$ となるものが存在する. すると, $p(-y) = (-y)^2 = y^2 = p(y) \neq 0$ なので, $-y \in p^{-1}(U)$ でもある. また, $y \neq 0$ でもあるので, $y \neq -y$ である. ここで, $p : \tilde{X} \to X$ が被覆であるという仮定から得られる $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \tilde{U}_j$ という表示において, $y \in \tilde{U}_{j_+}$ および $-y \in \tilde{U}_{j_-}$ となる $j_+, j_- \in J$ が存在する. $y \neq -y$ であり, $p|_{\tilde{U}_{j_\pm}} : \tilde{U}_{j_\pm} \to U$ が同相なので, $j_+ \neq j_-$ でなければならない. 従って, $\tilde{U}_{j_+} \cap \tilde{U}_{j_-} = \emptyset$ である. ここで, $0_\pm = (p|_{\tilde{U}_{j_\pm}})^{-1}(0)$ とおくと, $0_+ \neq 0_-$ である. また, p の定義より, $0_\pm$ は 2 乗して 0 になる実数である. しかし, 2 乗して 0 になる実数は 0 ただひとつしかないので, これは矛盾である. 従って, $p : \tilde{X} \to X$ は被覆でない.

(c) (b) の議論を適用することで, 2 乗して 0 になる複素数 $0_\pm$ であって $0_+ \neq 0_-$ となるものがあるという結論が導かれる. しかし, そのような複素数は 0 ただひとつしかないので, これは矛盾である. 従って, $p : \tilde{X} \to X$ は被覆でない.