

トポロジー 演習問題 (2018 年 6 月 13 日)

以下, \mathbb{R}^n および \mathbb{C}^n の部分集合には, \mathbb{R}^n および \mathbb{C}^n の標準的な位相から誘導された位相が与えられているものとする.

問題 1. 以下で与える連続写像 f_0 と f_1 の間のホモトピーの例を書け.

[1] $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

$$f_i : [0, 1] \rightarrow X, \quad \begin{cases} f_0(s) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\pi s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\pi s, \frac{1}{\sqrt{2}}), \\ f_1(s) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\pi s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\pi s, -\frac{1}{\sqrt{2}}). \end{cases}$$

[2] $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.

$$f_i : [0, 1] \rightarrow X, \quad \begin{cases} f_0(s) = (\sqrt{2} \cos 2\pi s, \sqrt{2} \sin 2\pi s, 1), \\ f_1(s) = (\sqrt{2} \cos 2\pi s, \sqrt{2} \sin 2\pi s, -1). \end{cases}$$

[3] $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

$$f_i : [0, 1] \rightarrow X, \quad \begin{cases} f_0(s) = (0, 0, 0), \\ f_1(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 1). \end{cases}$$

[4] $X = \{(4 + \cos \theta) \cos \varphi, (4 + \cos \theta) \sin \varphi, \sin \theta\} \in \mathbb{R}^3 \mid \theta, \varphi \in \mathbb{R}$

$$f_i : [0, 1] \rightarrow X, \quad \begin{cases} f_0(s) = (4 + \cos 2\pi s, 0, \sin 2\pi s), \\ f_1(s) = (-4 - \cos 2\pi s, 0, \sin 2\pi s). \end{cases}$$

問題 2. 以下で与える連続写像 $f_0 : X \rightarrow Y$ と $f_1 : X \rightarrow Y$ の間のホモトピーであって, $A \subset X$ を動かさないものの例を書け.

[1] $X = [0, +\infty)$, $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.

$$A = \{0\}, \quad \begin{cases} f_0(s) = (0, 0), \\ f_1(s) = (s, s^2). \end{cases}$$

[2] $X = [0, 1]$, $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.

$$A = \{0, 1\}, \quad \begin{cases} f_0(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0), \\ f_1(s) = (\sqrt{1 + \sin^2 \pi s} \cos 2\pi s, \sqrt{1 + \sin^2 \pi s} \sin 2\pi s, \sin \pi s). \end{cases}$$

[3] $X = [0, 1]$, $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z = 0\}$

$$A = \{0, 1\}, \quad \begin{cases} f_0(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s, 1), \\ f_1(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s, 1). \end{cases}$$

[4] $X = [0, 1]$, $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$

$$A = \{0, 1\}, \quad \begin{cases} f_0(s) = (\cos \pi s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \pi s, 0), \\ f_1(s) = (\cos \pi s, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \pi s, 0). \end{cases}$$

[5] $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$

$$A = \{0\}, \quad \begin{cases} f_0(x) = (x, 0), \\ f_1(x) = (x, 2x). \end{cases}$$

$$[6] \quad X = \mathbb{R}^2, Y = \mathbb{R}^3$$

$$A = \{(0, 0)\}, \quad \begin{cases} f_0(x, y) = (x, y, 0), \\ f_1(x, y) = (x, x + y, y). \end{cases}$$

$$[7] \quad X = [0, 1], Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

$$A = \{0\}, \quad \begin{cases} f_0(x) = (x, x^2), \\ f_1(s) = (-x, x^2). \end{cases}$$

$$[8] \quad X = [0, 1], Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

$$A = \{0\}, \quad \begin{cases} f_0(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s), \\ f_1(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s). \end{cases}$$

問題 3. 以下で与える位相空間 X と、その部分空間 $\text{pt} \subset X$ であって 1 点からなるものが、ホモトピー同値であること (同じホモトピー型を持つこと) を、強変形レトラクトの例を構成することによって示せ.

$$[1] \quad X = [0, +\infty), \quad \text{pt} = \{0\}.$$

$$[2] \quad X = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}, \quad \text{pt} = \{(0, 0)\}.$$

$$[3] \quad X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}, \quad \text{pt} = \{(0, 0)\}.$$

$$[4] \quad X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}, \quad \text{pt} = \{(0, 0)\}.$$

$$[5] \quad X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}, \quad \text{pt} = \{(0, 0, 0)\}.$$

$$[6] \quad X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}, \quad \text{pt} = \{(0, 0, 0)\}.$$

問題 4. 以下で与える位相空間 X と Y のホモトピー同値の例を書け. ただし, pt は一点からなる空間を意味する.

$$[1] \quad \begin{cases} X = \text{pt}, \\ Y = \{(\cos \theta, \sin \theta, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid \theta \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

$$[2] \quad \begin{cases} X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}, \\ Y = \text{pt}. \end{cases}$$

$$[3] \quad \begin{cases} X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \\ Y = \{((4 + \cos \theta) \cos \varphi, (4 + \cos \theta) \sin \varphi, \sin \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, \theta \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

$$[4] \quad \begin{cases} X = \text{pt}, \\ Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}. \end{cases}$$

$$[5] \quad \begin{cases} X = \mathbb{R}, \\ Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid yz = 0\}. \end{cases}$$

問題 5. 以下で与える被覆 $p: \tilde{X} \rightarrow X$, 道 $f: [0, 1] \rightarrow X$ および点 $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ に対して, f の持ち上げ $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ であって $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ となるものを書け. なお, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする.

$$[1] \quad p: \mathbb{R} \rightarrow S^1, p(x) = \exp 2\pi i x.$$

$$f(s) = \exp 6\pi i s, \quad \tilde{x}_0 = 0.$$

- [2] $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, p(x) = \exp 2\pi i x$.
 $f(s) = \exp(-2\pi i s), \quad \tilde{x}_0 = 1.$
- [3] $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, p(x) = \exp 2\pi i x$.
 $f(s) = \exp \pi i s, \quad \tilde{x}_0 = -1.$
- [4] $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, p(x) = \exp 2\pi i x$.
 $f(s) = -\exp \frac{\pi i s}{4}, \quad \tilde{x}_0 = \frac{1}{2}.$
- [5] $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, p(x) = \exp \pi i x$.
 $f(s) = \exp 2\pi i s, \quad \tilde{x}_0 = 0.$
- [6] $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1, p(x, y) = (\exp 2\pi i x, \exp 2\pi i y)$.
 $f(s) = (\exp 2\pi i s, \exp 4\pi i s), \quad \tilde{x}_0 = (1, 0).$
- [7] $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1, p(x, y) = (\exp 2\pi i x, \exp 2\pi i y)$.
 $f(s) = (\exp 2\pi i s, \exp(-3\pi i s)), \quad \tilde{x}_0 = (1, -1).$
- [8] $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1, p(x, y) = (\exp 2\pi i x, \exp 2\pi i y)$.
 $f(s) = (\exp \pi i s, \exp 4\pi i s), \quad \tilde{x}_0 = (0, 1).$
- [9] $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1, p(x, y) = (\exp 2\pi i x, \exp 2\pi i y)$.
 $f(s) = (\exp \frac{\pi i s}{3}, \exp \frac{-4\pi i s}{5}), \quad \tilde{x}_0 = (0, 0).$
- [10] $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1, p(x, y) = (\exp 2\pi i x, \exp \pi i y)$.
 $f(s) = (\exp \pi i s, \exp 2\pi i s), \quad \tilde{x}_0 = (2, 2).$
- [11] $p : S^1 \rightarrow S^1, p(z) = z^2$.
 $f(s) = \exp 2\pi i s, \quad \tilde{x}_0 = 1.$
- [12] $p : S^1 \rightarrow S^1, p(z) = z^2$.
 $f(s) = \exp \frac{\pi i s}{3}, \quad \tilde{x}_0 = 1.$
- [13] $p : S^1 \rightarrow S^1, p(z) = z^2$.
 $f(s) = \exp 4\pi i s, \quad \tilde{x}_0 = -1.$
- [14] $p : S^1 \rightarrow S^1, p(z) = z^2$.
 $f(s) = \exp \frac{-2\pi i s}{5}, \quad \tilde{x}_0 = -1.$
- [15] $p : S^1 \rightarrow S^1, p(z) = z^3$.
 $f(s) = \exp 2\pi i s, \quad \tilde{x}_0 = 1.$
- [16] $p : S^1 \rightarrow S^1, p(z) = z^4$.
 $f(s) = \exp \pi i s, \quad \tilde{x}_0 = i.$
- [17] $p : S^1 \rightarrow S^1, p(z) = z^3$.
 $f(s) = \exp(-\pi i s), \quad \tilde{x}_0 = \exp \frac{2\pi i}{3}.$

$$[18] p : S^1 \rightarrow S^1, p(z) = z^3.$$

$$f(s) = \exp 2\pi i s, \quad \tilde{x}_0 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

$$[19] p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, p(x) = \exp 2\pi i x.$$

$$f(s) = \begin{cases} \exp 2\pi i s, & (0 \leq s \leq 1/2) \\ \exp 2\pi i(3s - 1), & (1/2 \leq s \leq 1) \end{cases} \quad \tilde{x}_0 = 0.$$

$$[20] p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, p(x) = \exp 2\pi i x.$$

$$f(s) = \begin{cases} \exp 2\pi i s, & (0 \leq s \leq 1/2) \\ \exp(-2\pi i s), & (1/2 \leq s \leq 1) \end{cases} \quad \tilde{x}_0 = 1.$$

問題 6. 以下で与える群 G の位相空間 X への作用 $G \times X \rightarrow X$ から, 商空間 X/G への自然な射影 $p : X \rightarrow X/G, (p(x) = [x])$ によって被覆を定める. このとき, 以下で与える道 $f : [0, 1] \rightarrow X/G$ の, 点 $x_0 \in X$ を始点とする持ち上げ $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow X$ を書け. なお, $\mathbb{Z}_p = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^p = 1\}$ は位数 p の巡回群を意味し, 自然数 n に対して $S^{2n-1} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$ とする.

$$[1] G = \mathbb{Z}, X = \mathbb{R}, G \times X \rightarrow X, ((n, x) \mapsto n + x).$$

$$\tilde{f}(s) = [s], \quad x_0 = 0.$$

$$[2] G = \mathbb{Z}, X = \mathbb{R}, G \times X \rightarrow X, ((n, x) \mapsto n + x).$$

$$\tilde{f}(s) = [2s], \quad x_0 = 1.$$

$$[3] G = \mathbb{Z}, X = \mathbb{R}, G \times X \rightarrow X, ((n, x) \mapsto n + x).$$

$$\tilde{f}(s) = [s/2], \quad x_0 = 0.$$

$$[4] G = \mathbb{Z}, X = \mathbb{R}, G \times X \rightarrow X, ((n, x) \mapsto n + x).$$

$$\tilde{f}(s) = [2s/3], \quad x_0 = 2.$$

$$[5] G = \mathbb{Z}^2, X = \mathbb{R}^2, G \times X \rightarrow X, ((m, n, x, y) \mapsto (m + x, n + y)).$$

$$\tilde{f}(s) = [2s, 3s], \quad x_0 = (1, 1).$$

$$[6] G = \mathbb{Z}^2, X = \mathbb{R}^2, G \times X \rightarrow X, ((m, n, x, y) \mapsto (m + x, n + y)).$$

$$\tilde{f}(s) = [s/2, s/3], \quad x_0 = (1, -1).$$

$$[7] G = \mathbb{Z}_2, X = S^1, G \times X \rightarrow X, ((\zeta, z) \mapsto \zeta z).$$

$$\tilde{f}(s) = [\exp 4\pi i s], \quad x_0 = 1.$$

$$[8] G = \mathbb{Z}_2, X = S^1, G \times X \rightarrow X, ((\zeta, z) \mapsto \zeta z).$$

$$\tilde{f}(s) = [\exp 2\pi i s], \quad x_0 = -1.$$

$$[9] G = \mathbb{Z}_2, X = S^3, G \times X \rightarrow X, ((\zeta, z_1, z_2) \mapsto (\zeta z_1, \zeta z_2)).$$

$$\tilde{f}(s) = [\exp \pi i s, 0], \quad x_0 = (-1, 0).$$

$$[10] G = \mathbb{Z}_2, X = S^3, G \times X \rightarrow X, ((\zeta, z_1, z_2) \mapsto (\zeta z_1, \zeta z_2)).$$

$$\tilde{f}(s) = [\cos 2\pi s, \sin 2\pi s], \quad x_0 = (1, 0).$$

以上.

解答

問題 1. 以下はホモトピーを与える写像の例である. 他の写像であっても, (i) 定義域と値域が正しい, (ii) 連続である, (iii) f_0 と f_1 をつないでいる, の三点を満たしていれば答えとなる.

$$[1] \quad F(s, t) = \left(\cos \frac{\pi(2t-1)}{2} \cos \pi s, \cos \frac{\pi(2t-1)}{2} \sin \pi s, \sin \frac{\pi(2t-1)}{2} \right),$$

$$[2] \quad F(s, t) = (\sqrt{(2s-1)^2 + 1} \cos 2\pi s, \sqrt{(2s-1)^2 + 1} \sin 2\pi s, 2s-1),$$

$$[3] \quad F(s, t) = (t \cos 2\pi s, t \sin 2\pi s, t),$$

$$[4] \quad F(s, t) = ((4 + \cos 2\pi s) \cos \pi t, (4 + \cos 2\pi s) \sin \pi t, \sin 2\pi s).$$

問題 2. 以下はホモトピーの例である. 問題 1 で注意した点に加えて, (iv) A を動かさない, という条件を満たすものは正しい答えである.

$$[1] \quad F(s, t) = (ts, t^2 s^2),$$

$$[2] \quad F(s, t) = (\sqrt{1 + t^2 \sin^2 \pi s} \cos 2\pi s, \sqrt{1 + t^2 \sin^2 \pi s} \sin 2\pi s, t \sin \pi s),$$

$$[3] \quad F(s, t) = (\cos \pi s, (1-2t) \sin \pi s, 1 + 4t(t+1) \sin^2 \pi s),$$

$$[4] \quad F(s, t) = \left(\cos \pi s, \frac{2s-1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{s(1-s)} \sin \pi s \right),$$

$$[5] \quad F(x, t) = (x, 2tx),$$

$$[6] \quad F(x, t) = (x, tx + y, ty),$$

$$[7] \quad F(x, t) = \begin{cases} f_0((1-2t)x), & (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1/2) \\ f_1((2t-1)x), & (0 \leq x \leq 1, 1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

$$[8] \quad F(s, t) = \begin{cases} (\cos \pi(1-2t)s, \sin \pi(1-2t)s), & (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1/2) \\ (\cos \pi(2t-1)s, \sin \pi(2t-1)s), & (0 \leq x \leq 1, 1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

問題 3. 一般に, 位相空間 X から pt への連続写像はただ一つしかなく, それは X の点をすべて pt の 1 点に移すものである. その写像がレトラクト $r: X \rightarrow \text{pt}$ となる. 以下は $i \circ r \simeq 1_X$ を与えるホモトピー H の例である. (ここで $i: \text{pt} \rightarrow X$ は包含写像である.)

$$[1] \quad H(x, t) = tx,$$

$$[2] \quad H(x, x^2, t) = (tx, t^2 x^2),$$

$$[3] \quad H(x, 0, t) = (tx, 0),$$

$$[4] \quad H(x, 2x, t) = (tx, 2tx),$$

$$[5] \quad H(x, y, 0, t) = (tx, ty, 0),$$

$$[6] \quad H(x, y, z, t) = (tx, ty, tz).$$

問題 4. 以下, $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow X$ が, X と Y のホモトピー同値を与える写像の例である. また, 参考のため, $g \circ f \simeq 1_X$ を与えるホモトピー $H_X: X \times [0, 1] \rightarrow X$ および $f \circ g \simeq 1_Y$ を与えるホモトピー $H_Y: Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ も与えてある. また, 以下では pt の唯一の要素を p と書くことにする: $\text{pt} = \{p\}$.

$$[1] \quad f(p) = (1, 0, 0),$$

$$g(\cos \theta, \sin \theta, \theta) = p,$$

$$H_X(p, t) = p,$$

$$H_Y(\cos \theta, \sin \theta, \theta, t) = (\cos t\theta, \sin t\theta, t\theta).$$

$$[2] \quad f(x, y, z) = p,$$

$$g(p) = (0, 0, 1),$$

$$H_X(x, y, z, t) = (tx, ty, \sqrt{1 - t^2x^2 - t^2y^2})$$

$$H_Y(p, t) = p.$$

$$[3] \quad f(x, y) = (4 + x, 0, y),$$

$$g((4 + \cos \theta) \cos \varphi, (4 + \cos \theta) \sin \varphi, \sin \theta) = (\cos \theta, \sin \theta),$$

$$H_X(x, y, t) = (x, y),$$

$$H_Y((4 + \cos \theta) \cos \varphi, (4 + \cos \theta) \sin \varphi, \sin \theta, t)$$

$$= (4 + \cos \theta) \cos t\varphi, (4 + \cos \theta) \sin t\varphi, \sin \theta).$$

$$[4] \quad f(p) = (0, 0),$$

$$g(x, y) = p,$$

$$H_X(p, t) = p,$$

$$H_Y(x, y, t) = (tx, ty).$$

$$[5] \quad f(x) = (x, 0, 0),$$

$$g(x, y, z) = x,$$

$$H_X(x, t) = x,$$

$$H_Y(x, y, z, t) = (x, ty, tz).$$

問題 5. 被覆 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ に対して、道 $f: [0, 1] \rightarrow X$ の持ち上げ $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ とは、 $p \circ \tilde{f} = f$ を満たす写像のことである。始点についての条件 $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ にもとで、持ち上げ \tilde{f} はただ一つしかない。

$$[1] \quad \tilde{f}(s) = 3s.$$

$$[2] \quad \tilde{f}(s) = -s + 1.$$

$$[3] \quad \tilde{f}(s) = \frac{s}{2} - 1.$$

$$[4] \quad \tilde{f}(s) = \frac{s}{8} + \frac{1}{2}.$$

$$[5] \quad \tilde{f}(s) = \frac{s}{4}.$$

$$[6] \quad \tilde{f}(s) = (s + 1, 2s).$$

$$[7] \quad \tilde{f}(s) = (s + 1, \frac{3s}{2} - 1).$$

$$[8] \quad \tilde{f}(s) = (\frac{s}{2}, 2s + 1).$$

$$[9] \quad \tilde{f}(s) = (\frac{s}{6}, -\frac{2s}{5}).$$

$$[10] \quad \tilde{f}(s) = (\frac{s}{2} + 2, 2s + 2).$$

$$[11] \quad \tilde{f}(s) = \exp \pi i s.$$

$$[12] \quad \tilde{f}(s) = \exp \frac{\pi i s}{6}.$$

$$[13] \quad \tilde{f}(s) = -\exp 2\pi i s.$$

$$[14] \quad \tilde{f}(s) = -\exp \frac{-\pi i s}{5}.$$

$$[15] \quad \tilde{f}(s) = \exp \frac{2\pi i s}{3}.$$

$$[16] \quad \tilde{f}(s) = \exp \frac{\pi(s+1)}{4}.$$

$$[17] \quad \tilde{f}(s) = \exp \frac{\pi i s(2-s)}{3}.$$

$$[18] \quad \tilde{f}(s) = \exp \frac{2\pi i s(s+1)}{3}.$$

$$[19] \quad \tilde{f}(s) = \begin{cases} s, & (0 \leq s \leq \frac{1}{2}) \\ 3s - 1, & (\frac{1}{2} \leq s \leq 1) \end{cases}$$

$$[20] \quad \tilde{f}(s) = \begin{cases} s + 1, & (0 \leq s \leq \frac{1}{2}) \\ -s + 2, & (\frac{1}{2} \leq s \leq 1) \end{cases}$$

問題 6.

[1] $f(s) = s.$

[2] $f(s) = 2s + 1.$

[3] $f(s) = \frac{s}{2}.$

[4] $f(s) = \frac{2s}{3} + 2.$

[5] $f(s) = (s + 1, 3s + 1).$

[6] $f(s) = \left(\frac{s}{2} + 1, \frac{s}{3} - 1\right).$

[7] $f(s) = \exp 4\pi i s.$

[8] $f(s) = -\exp 2\pi i s.$

[9] $f(s) = (-\exp \pi i s, 0).$

[10] $f(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s).$