

トポロジー 演習問題 (2018 年 7 月 4 日)

問題 1. 以下で定める集合  $V_i$  および  $V_i$  の部分集合からなる集合  $K_i$  について,  $V_i$  を頂点集合とする単体複体になるものをすべて選び, その次元を答えよ. また, 単体複体となる  $K_i$  のうち, その実現  $|K_i|$  が 1 点からなる空間 pt とホモトピー同値であるものをすべて答えよ.

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \{0, 1\}, & K_1 &= \{\{0\}\}. \\
 V_2 &= \{0, 1\}, & K_2 &= \{\{0\}, \{1\}\}. \\
 V_3 &= \{0, 1\}, & K_3 &= \{\{1\}, \{0, 1\}\}. \\
 V_4 &= \{0, 1\}, & K_4 &= \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}. \\
 V_5 &= \{0, 1, 2\}, & K_5 &= \{\{0\}, \{1\}\}. \\
 V_6 &= \{0, 1, 2\}, & K_6 &= \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}. \\
 V_7 &= \{0, 1, 2\}, & K_7 &= \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}. \\
 V_8 &= \{0, 1, 2\}, & K_8 &= \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}\}. \\
 V_9 &= \{0, 1, 2\}, & K_9 &= \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1, 2\}\}. \\
 V_{10} &= \{0, 1, 2\}, & K_{10} &= \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}\}. \\
 V_{11} &= \{0, 1, 2\}, & K_{11} &= \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}\}. \\
 V_{12} &= \{0, 1, 2\}, & K_{12} &= \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\}. \\
 V_{13} &= \{0, 1, 2\}, & K_{13} &= \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}. \\
 V_{14} &= \{0, 1, 2, 3\}, & K_{14} &= \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}\}. \\
 V_{15} &= \{0, 1, 2, 3\}, & K_{15} &= \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}. \\
 V_{16} &= \{0, 1, 2, 3\}, & K_{16} &= \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 3\}, \{0, 1, 2\}\}. \\
 V_{17} &= \{0, 1, 2, 3\}, & K_{17} &= \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}. \\
 V_{18} &= \{0, 1, 2, 3\}, & K_{18} &= \left\{ \begin{array}{l} \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \\ \{1, 3\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 2, 3\} \end{array} \right\}. \\
 V_{19} &= \{0, 1, 2, 3\}, & K_{19} &= \left\{ \begin{array}{l} \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \\ \{2, 3\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 2, 3\} \end{array} \right\}. \\
 V_{20} &= \{0, 1, 2, 3\}, & K_{20} &= \left\{ \begin{array}{l} \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \\ \{1, 3\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 3\} \end{array} \right\}. \\
 V_{21} &= \{0, 1, 2, 3\}, & K_{21} &= \left\{ \begin{array}{l} \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \\ \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 3\} \end{array} \right\}. \\
 V_{22} &= \{0, 1, 2, 3\}, & K_{22} &= \left\{ \begin{array}{l} \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \\ \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\} \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

問題 2. 頂点集合を  $V = \{0, 1, \dots, n\}$  とする  $n$  次元単体複体  $K$  はただ一つしかないことを証明せよ.

以上.

解答.

問題 1.

単体複体になる $K_i$	次元	$ K_i $ とホモトピー同値となる空間
$K_2$	0	pt $\sqcup$ pt
$K_4$	1	pt
$K_6$	0	pt $\sqcup$ pt $\sqcup$ pt
$K_8$	1	pt $\sqcup$ pt
$K_{11}$	1	pt
$K_{12}$	1	$S^1$
$K_{13}$	2	pt
$K_{15}$	2	pt $\sqcup$ pt
$K_{17}$	2	pt
$K_{19}$	2	pt
$K_{21}$	2	pt

問題 2.  $K$  は  $n$  次元単体複体なので,  $n$  単体を含むはずである.  $n$  単体とは  $n+1$  個の頂点を含む単体であったので, 今の場合,  $n$  単体は  $s = \{0, 1, \dots, n\}$  しかない. 単体複体の定義より,  $s$  の空でない部分集合は全て  $K$  に含まれるはずである. それは,  $K$  の頂点集合  $\{0, 1, \dots, n\}$  の空でない部分集合全体と一致する:

$$K = \{V = \{0, 1, \dots, n\} \text{ の空でない部分集合} \}.$$

そのような単体複体は他にないので, 問題 2 の性質を持つ単体複体  $K$  はただ一つしかない.