

トポロジー 演習問題 (2018 年 7 月 11 日)

- 問題 1. 頂点の集合が $\{v_0, v_1, v_2\}$ であるような単体複体 K の例を全て列挙せよ.
- 問題 2. 頂点の集合が $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ であるような 3 次元単体複体 K の例を挙げよ.
- 問題 3. 単体複体 K に q 次元単体が含まれるとき, $p = 0, \dots, q - 1$ を次元に持つ単体が含まれることを示せ.
- 問題 4. 単体複体 K の q 次元骨格 K^q は, K の部分複体であることを示せ.
- 問題 5. 有限単体複体は有限次元であることを示せ.
- 問題 6. 有限次元であるが, 有限ではない単体複体の例を挙げよ. (ヒント: 0 次元の有限ではない単体複体や, 1 次元の有限ではない単体複体の例を考えよ.)
- 以上.

解答例

問題 1. $K = \emptyset$ という場合を除けば, 全部で 9 個ある:

$$K_1 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}\},$$

$$K_2 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}\},$$

$$K_3 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_2\}\},$$

$$K_4 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_1, v_2\}\},$$

$$K_5 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}\},$$

$$K_6 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}\},$$

$$K_7 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}\},$$

$$K_8 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}\},$$

$$K_9 = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_0, v_1, v_2\}\}.$$

問題 2. 以下のものに限る:

$$K = \left\{ \begin{array}{l} \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \\ \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \\ \{v_0, v_1, v_2\}, \{v_0, v_1, v_3\}, \{v_0, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_0, v_1, v_2, v_3\} \end{array} \right\}.$$

問題 3. q 次元単体 s を, K の頂点を用いて, $s = \{v_0, v_1, \dots, v_q\}$ 表したとする. 単体複体の定義より, s の部分集合は K の単体である. 特に, $p = 0, 1, \dots, q-1$ に対して $\{v_0, \dots, v_p\}$ は K の単体であるが, これは p 次元である.

問題 4. q 次元骨格の定義より, K の頂点 (つまり 0 次元単体) は全て K^q に含まれる. そこで, K^q の頂点の集合として K の頂点の集合を考える. すると, K^q の単体は K^q の頂点の集合の部分集合になっている. また, K^q のある単体 $s \in K^q \subset K$ に対し, その任意の面 $s' \subset s$ は K の単体であって, s の次元以下である. 再び q 次元骨格の定義より, $s' \in K^q$ である. 以上によって, K^q が単体複体であることが示せた.

問題 5. 単体複体 K は有限なので, K に含まれる単体の次元の最大値が存在する. その次元を n とすれば, $(n+1)$ 単体は K の中には存在しないので, K は次元が n の有限次元単体複体である.

問題 6. 例えば, 以下のような例がある:

$$K = \{\{v_n\} \mid (n \in \mathbb{Z})\},$$

$$K = \{\{v_n\}, \{v_n, v_{n+1}\} \mid (n \in \mathbb{Z})\}.$$