トポロジー 演習問題 (2019 年 4 月 10 日)

問題 1. 以下の (1)–(10) で与える連続写像 f_0 から f_1 へのホモトピーの例を書け. ただし, S^1 と $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ は次のように定める:

$$S^1 = \{(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 |\ \theta \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x,y) \neq (0,0)\}.$$

(1)

$$f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{cases} f_0(x) = (0,0), \\ f_1(x) = (x,0). \end{cases}$$

(2)

$$f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{cases} f_0(x,y) = (0,0), \\ f_1(x,y) = (x,y). \end{cases}$$

(3)

$$f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{cases} f_0(x) = (0,0), \\ f_1(x) = (\cos x, \sin x). \end{cases}$$

(4)

$$f_i : S^1 \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, \qquad \begin{cases} f_0(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta, \sin\theta), \\ f_1(\cos\theta, \sin\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta). \end{cases}$$

(5)

$$f_i : S^1 \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, \qquad \begin{cases} f_0(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta, \sin\theta), \\ f_1(\cos\theta, \sin\theta) = (e^{\cos\theta}\cos\theta, e^{\cos\theta}\sin\theta). \end{cases}$$

(6)

$$f_i : S^1 \to S^1 \times \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} f_0(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \\ f_1(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1). \end{cases}$$

(7)

$$f_i : S^1 \to S^1 \times S^1, \qquad \begin{cases} f_0(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1, 0), \\ f_1(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, -1, 0). \end{cases}$$

(8)

$$f_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{cases} f_0(x) = (x+1, 0), \\ f_1(x) = (x-1, x). \end{cases}$$

(9)

$$f_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{cases} f_0(x) = (\cos\pi x, \sin\pi x), \\ f_1(x) = (\cos\pi x, -\sin\pi x). \end{cases}$$

(10)

$$f_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, \qquad \begin{cases} f_0(x) = (\cos\pi x, \sin\pi x), \\ f_1(x) = (\cos\pi(x+1), \sin\pi(x+1)). \end{cases}$$

問題 2. 以下の (1)–(3) で与える連続写像 f_0 から f_1 へのホモトピーであって, A を動かさないものの例を書け.

(1)

$$f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad A = \{0\}, \qquad \begin{cases} f_0(x) = (0,0), \\ f_1(x) = (x,0). \end{cases}$$

(2)

$$f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad A = \{(0,0)\}, \qquad \begin{cases} f_0(x,y) = (0,0), \\ f_1(x,y) = (x,y). \end{cases}$$

(3)

$$f_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad A = \{0,1\}, \qquad \begin{cases} f_0(x) = (\cos \pi x, \sin \pi x), \\ f_1(x) = (\cos \pi x, -\sin \pi x). \end{cases}$$

問題 3. 以下を証明せよ.

(a) 位相空間 X がコンパクトであるとき, X の閉部分空間はコンパクトである.

(b) 位相空間 X から Y への連続写像 $f : X \to Y$ が与えられたとする. X がコンパクトならば, 像 $f(X)$ もコンパクトである.

(c) Hausdorff 位相空間 Y のコンパクトな部分空間 $C \subset Y$ は閉集合である.

(d) コンパクト位相空間 X から Hausdorff 位相空間 Y への連続な全単射 $f : X \to Y$ は同相写像である. (ヒント: 上の (a), (b), (c) を組み合わせる.)

(e) 区間 $[0,1]$ の同値関係 $\sim$ を以下で定める:

$$t \sim t' \Leftrightarrow \begin{cases} t = t', \text{ または,} \\ t = 0 \text{ かつ } t' = 1, \text{ または,} \\ t = 1 \text{ かつ } t' = 0. \end{cases}$$

商空間 $[0,1]/\sim$ に $[0,1]$ からの商位相を入れたものは,

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; x^2 + y^2 = 1\}$$

と同相である. (ヒント: (d) を使う.)

問題 4. X, Y, Z を位相空間とし, $A \subset X$ を部分空間とする. 以下を証明せよ.

(a) 連続写像 $f_i : X \to Y$, $(i = 0,1)$ と $g : Y \to Z$ が与えられたとする. f_0 と f_1 が A を動かさずにホモトピックならば, $g \circ f_0$ と $g \circ f_1$ は A を動かさずにホモトピックである.

(b) 連続写像 $f : X \to Y$ と $g_i : Y \to Z$, $(i = 0,1)$ が与えられとする. g_0 と g_1 が $f(A)$ を動かさずにホモトピックならば, $g_0 \circ f$ と $g_1 \circ f$ は A を動かさずにホモトピックである.

(c) 連続写像 $f_i : X \to Y$ と $g_i : Y \to Z$ が与えられたとする. $(i = 0, 1.)$ f_0 と f_1 がホモトピックであり, g_0 と g_1 がホモトピックであるとき, $g_0 \circ f_0$ と $g_1 \circ f_1$ はホモトピックである.

以上.

解答

問題 1. 以下はホモトピーの例である.

(1) $F : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $F(x,t) = (tx, 0)$,
(2) $F : \mathbb{R}^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y,t) = (tx, ty)$,
(3) $F : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $F(x,t) = (t\cos x, t\sin x)$,
(4) $F : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, $F(\cos\theta, \sin\theta) = ((t+1)\cos\theta, (t+1)\sin\theta)$,
(5) $F : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, $F(\cos\theta, \sin\theta) = (e^{t\cos\theta}\cos\theta, e^{t\cos\theta}\sin\theta)$,
(6) $F : S^1 \times [0,1] \to S^1 \times \mathbb{R}$, $F(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, t)$,
(7) $F : S^1 \times [0,1] \to S^1 \times S^1$, $F(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \cos\pi t, \sin\pi t)$,
(8) $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $F(x,t) = (x+1-2t, tx)$,
(9) $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $F(x,t) = (\cos\pi x, (1-2t)\sin\pi x)$,
(10) $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, $F(x,t) = (\cos\pi(x+t), \sin\pi(x+t))$.

問題 2. 以下はホモトピーの例である.

(1) $F : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $F(x,t) = (tx, 0)$,
(2) $F : \mathbb{R}^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y,t) = (tx, ty)$,
(3) $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $F(x,t) = (\cos\pi x, (1-2t)\sin\pi x)$.

問題 3.

(a) $C \subset X$ を閉部分空間とし, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ をその開被覆とするとき, ある有限部分集合 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \subset A$ が存在して, $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1,\dots,n}$ が C の開被覆となることを示せば良い. 各 $\alpha \in A$ に対して, $U_\alpha \subset C$ は開集合なので, ある開集合 $\tilde{U}_\alpha$ を用いて $U_\alpha = \tilde{U}_\alpha \cap C$ と書くことができる. $\{\tilde{U}_\alpha, X\backslash C\}$ は X の開被覆である. X がコンパクトであるので, ある有限部分集合 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \subset A$ が存在して, $\{\tilde{U}_{\alpha_i}, X\backslash C\}_{i=1,\dots,n}$ は X の開被覆である. すると,

$$C = C \cap X = C \cap \left\{ (X\backslash C) \cup \bigcup_{i=1}^n \tilde{U}_{\alpha_i} \right\} = \bigcup_{i=1}^n C \cap \tilde{U}_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$$

となるので, $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1,\dots,n}$ は C の開被覆である.

(b) $f(X)$ の開被覆 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が与えられたとき, 有限部分集合 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset A$ が存在して, $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1,\dots,n}$ が $f(X)$ の開被覆になることを示す. $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ は X の開被覆である. X がコンパクトなので, ある有限部分集合 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset A$ が存在して, $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{i=1,\dots,n}$ は X の開被覆となる. すると,

$$f(X) = f(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_{\alpha_i}) = \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(V_{\alpha_i})) = \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$$

となるので, $\{V_{\alpha_i}\}_{i=1,\dots,n}$ は $f(X)$ の開被覆である.

(c) C が閉集合であるということは, $Y\backslash C$ が Y の開集合であるということである. $Y\backslash C$ が Y の開集合であるということは, 任意の点 $y \in Y\backslash C$ に対して, $y \in U \subset Y\backslash C$ となる開集合 U が存在するということであり, これを示す. $C = \emptyset$ または $C = Y$ の場合には明らかに C は閉集合なので, $C \neq \emptyset, Y$ と仮定する. Y が Hausdorff であるので, 任意の点 $c \in C \subset Y$ に対して, ある開集合 $V_c, U_c \subset Y$ であって, $c \in V_c$, $y \in U_c$, $U_c \cap V_c = \emptyset$ となるものが存在する. $\{V_c\}_{c\in C}$ は C の開被覆であり, C はコンパクトである. 従って, ある有限

集合 $\{c_1, \ldots, c_n\} \subset C$ であって, $\{V_{c_i}\}_{i=1,\ldots,n}$ が C の開被覆となるものが存在する. 開集合 U を $U = U_{c_1} \cap \cdots U_{c_n}$ と定めると, $y \in U$ であり,

$$U \cap C \subset U \cap \bigcup_{i=1}^{n} V_{c_i} = \bigcup_{i=1}^{n} U \cap V_{c_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{c_i} \cap V_{c_i} = \emptyset$$

となるので, $U \subset Y \backslash C$ となる.

(d) 任意の閉集合 $C \subset X$ に対して, $f(C) \subset Y$ が閉集合であることを示せば良い. X がコンパクトなので, (a) より C もコンパクトである. すると (b) より $f(C)$ もコンパクトである. Y は Hausdorff なので, (c) より $f(C)$ は閉集合である.

(e) 写像 $f : [0,1]/\sim \to S^1$ を $f([t]) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ で定める. $[0,1]/\sim$ の位相は $[0,1]$ の位相から誘導され, $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ の位相は $\mathbb{R}^2$ から誘導されていることに注意すると, f が連続であることは, 合成写像

$$\begin{array}{ccccccc} [0,1] & \to & [0,1]/\sim & \to & S^1 & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & [t] & \mapsto & f([t]) & \mapsto & f([t]) \end{array}$$

が連続であることから従う. この合成写像 $[0,1] \to \mathbb{R}^2$ は $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ と表示でき, 連続であることがわかるので, f は連続である. また, f は全単射であることは, すぐに確認できる. $[0,1]$ がコンパクトであることから, $[0,1]/\simeq$ もコンパクトであることがわかる. $\mathbb{R}^2$ は Hausdorff なので, $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ も Hausdorff である. よって (e) より, f は同相写像である.

問題 3.

(a) $F : X \times [0,1] \to Y$ が f_0 から f_1 への A を動かさないホモトピーであるならば, $g \circ F : X \times [0,1] \to Z$ は $g \circ f_0$ から $g \circ f_1$ への A を動かさないホモトピーを与える.

(b) $G : Y \times [0,1] \to Z$ が g_0 から g_1 への $f(A)$ を動かさないホモトピーであるならば, $F(x,t) = G(f(x),t)$ によって定めた写像 $F : X \times [0,1] \to Z$ は $g_0 \circ f$ から $g_1 \circ f$ への A を動かさないホモトピーを与える.

(c) $A = \emptyset$ として (a) を用いることで, $f_0 \simeq f_1$ より $g_0 \circ f_0 \simeq g_0 \circ f_1$ である. 同様に (b) を用いることで, $g_0 \simeq g_1$ より $g_0 \circ f_1 \simeq g_1 \circ f_1$ である. ホモトピックであるという関係 $\simeq$ は同値関係であるので, $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ g_1$ である.