トポロジー 演習問題 (2019 年 5 月 22 日)

問題 1. 以下で与える連続な全射写像 $p : \tilde{X} \to X$ は, 被覆でないことを示せ.

$$(a) \quad \begin{cases} \tilde{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 - y^2 = 0\}, \\ X = \mathbb{R}, \\ p(x, y) = x. \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} \tilde{X} = \mathbb{R}, \\ X = [0, \infty), \\ p(x) = x^2. \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} \tilde{X} = X = \mathbb{C}, \\ p(z) = z^2. \end{cases}$$

問題 2. 以下の群作用が自由であることを示せ.

(a) $\mathbb{Z}_2 \times S^n \to S^n$, $\quad ((-1)^a, x_0, \ldots, x_n) \mapsto ((-1)^a x_0, \ldots, (-1)^a x_n)$.

(b) $\mathbb{Z}_k \times S^{2m+1} \to S^{2m+1}$, $\quad (e^{2\pi in/k}, z_0, \ldots, z_m) \mapsto (e^{2\pi in/k} z_0, \ldots, e^{2\pi in/k} z_m)$.

ただし, 自然数 k に対して, $\mathbb{Z}_k = \{e^{2\pi in/k} \in \mathbb{C} |\ n = 0, \ldots, k-1\}$ は位数 k の巡回群である. また (a) の S^n と (b) の S^{2m+1} は以下で定義するものとする.

$$S^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} |\ x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\},$$
$$S^{2m+1} = \{(z_0, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1} |\ |z_0|^2 + \cdots + |z_m|^2 = 1\}.$$

問題 3. 以下の群作用が真性不連続であることを示せ.

(a) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad (n, x) \mapsto n + x$.

(b) $\mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \times [-1, 1]) \to \mathbb{R} \times [-1, 1]$ $\quad (n, x, y) \mapsto (n + x, (-1)^n y)$.

問題 4. 群 G の位相空間 X への真性不連続な作用は自由であることを示せ.

問題 5. 位相空間 X 上の被覆 $p : \tilde{X} \to X$ が与えられたとする.

(a) p は開写像であることを示せ.

(b) $\tilde{X}$ に同値関係 $\sim$ を以下で定める: $\tilde{x} \sim \tilde{x}' \Leftrightarrow p(\tilde{x}) = p(\tilde{x}')$. このとき, 商空間 $\tilde{X}/\sim$ は X と同相であることを示せ.

問題 6. 群 G が位相空間 X に自由に作用するとし, $p : X \to X/G$ を自然な射影とする. このとき, 任意の点 $\bar{x} \in X/G$ の逆像の濃度 $\mathrm{Card}(p^{-1}(\bar{x}))$ は, G の濃度 $\mathrm{Card}(G)$ と一致することを示せ.

以上.

---

http://math.shinshu-u.ac.jp/~kgomi/class/index.html.

解答例

問題 1. いずれの場合も, $p:\tilde{X}\to X$ が被覆であれば, 任意の点 $x_0\in X$ に対して, そのある開近傍 $U\subset X$ を見つけて, 次が成り立つようにできる:

- $\tilde{X}$ のある部分集合 $\tilde{U}_j$, $(j\in J)$ を用いて, $p^{-1}(U)=\bigcup_{j\in J}\tilde{U}_j$ と表せる.
- $j,k\in J$ が $j\neq k$ ならば, $U_j\cap U_k=\emptyset$ である.
- 各 $j\in J$ に対して, $p:\tilde{X}\to X$ の制限 $p|_{\tilde{U}_j}:\tilde{U}_j\to U$ は同相写像である.

言い換えれば, 上が成り立っていない点 x_0 を見つけることによって, $p:\tilde{X}\to X$ が被覆でないと示せる. 証明の流れとしては, 背理法を用いる. すなわち, $p:\tilde{X}\to X$ が被覆であるとすると, ある点 x_0 に注目して議論を展開することで, 矛盾が生じることを示す.

(a) $p:\tilde{X}\to X$ が被覆だと仮定し, $x_0=0$ を考える. すると, 上で述べたような x_0 を含む開近傍 U が存在する. 必要なら U のうちの x_0 を含む連結成分を考え, 改めてそれを U と書くことで, U 自身が連結であると仮定してよい. このとき, U は $\mathbb{R}$ の連結開集合なので, ある開区間 (a,b), $(a<0<b)$ である. すると, $U=(a,b)$ の逆像

$$p^{-1}(U)=\{(x,x),(x,-x)\in\mathbb{R}^2|\ a<x<b\}$$

は連結である. U 自身も連結であり, 被覆であることから従う $p^{-1}(U)$ の表示において, 各 $j\in J$ に対し, U と同相な $\tilde{U}_j$ も連結である. $p^{-1}(U)$ の連結成分の個数 (濃度) は J の要素の個数 (濃度) と一致するため, J は一つの要素からなる集合 $J=\{0\}$ であることがわかる. すなわち, $p^{-1}(U)=\tilde{U}_0$ である. これよりさらに $p|_{p^{-1}(U)}:p^{-1}(U)\to U$ が同相であることがわかる. $p^{-1}(U)$ と U が同相であれば, それぞれから p で対応する一点を取り除いた $p^{-1}(U)\backslash\{(0,0)\}$ と $U\backslash\{0\}$ が同相であるということになる. 特に, 両者の連結成分の個数は一致する. しかし, $p^{-1}(U)\backslash\{(0,0)\}$ の連結成分は 4 つである一方で, $U\backslash\{0\}$ の連結成分は 2 つであり, 矛盾である. 従って, $p:\tilde{X}\to X$ は被覆でない.

(b) $p:\tilde{X}\to X$ が被覆だと仮定し, $x_0=0$ を考える. すると, はじめに述べたような x_0 を含む開近傍 U が存在する. U は開集合なので, $x_0=0$ 以外の点 $y\in U$ を含む. ($X=\mathbb{R}$ は Hausdorff なので, 一点からなる集合は閉集合である.) $y\neq x_0=0$ なので, $-y\neq y$ である. $\pm y\in p^{-1}(U)$ なので, $y\in\tilde{U}_{j_+}$ および $-y\in\tilde{U}_{j_-}$ となる $j_\pm\in J$ がある. $y\neq -y$ であり, $p|_{\tilde{U}_{j_\pm}}:\tilde{U}_{j_\pm}\to U$ が同相なので, $j_+\neq j_-$ でなければならない. 従って, $\tilde{U}_{j_+}\cap\tilde{U}_{j_-}=\emptyset$ である. ここで, $0_\pm=(p|_{\tilde{U}_{j_\pm}})^{-1}(0)$ とおくと, $0_+\neq 0_-$ である. また, p の定義より, $0_\pm$ は 2 乗して 0 になる実数である: $(0_\pm)^2=0$. しかし, 2 乗して 0 になる実数は 0 ただひとつしかないので, これは矛盾である. 従って, $p:\tilde{X}\to X$ は被覆でない.

(c) (b) と同様の議論により, $p:\tilde{X}\to X$ が被覆であるという仮定から, 2 乗して 0 になる複素数 $0_\pm$ であって $0_+\neq 0_-$ となるものがあるという結論が導ける. しかし, そのような複素数は 0 ただひとつしかないので, これは矛盾である. 従って, $p:\tilde{X}\to X$ は被覆でない.

問題 2.

(a) 各 $x \in S^n$ と $-1 \in \mathbb{Z}_2$ に対して $-x \neq x$ が成り立つことを言えばよいが, それは確かに成り立っている. ($-x = x$ が成り立つような $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ は $x = (0, \ldots, 0)$ だけだが, それは S^n には含まれない点である.)

(b) 各 $z \in S^{2m+1}$ に対して, もし $g \in \mathbb{Z}_k$ が $gz = z$ を満たすならば, $g = 1$ であることを示せばよい. $z = (z_0, \ldots, z_m)$ と表示すると, $gz = z$ が成り立つのは, $z_j = gz_j$ が $j = 0, \ldots, m$ に対して成り立つとき, そのときに限る. $z \in S^{2m+1}$ なので, z_j のうちどれかは 0 ではない. そのとき $z_j = gz_j$ に z_j^{-1} をかければ $g = 1$ となる.

問題 3.

(a) 実数 ϵ を $0 < \epsilon < 1/2$ となるように選ぶ. 各 $x \in X$ に対して, $V_x = (x-\epsilon, x+\epsilon)$ と定める. 任意の $n, n' \in \mathbb{Z}, n \neq n'$ に対して, $x' = x+n$ および $m = n'-n \neq 0$ とおくと, 以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} nV_x \cap n'V_x &= (x+n-\epsilon, x+n+\epsilon) \cap (x+n'-\epsilon, x+n'+\epsilon) \\ &= (x'-\epsilon, x'+\epsilon) \cap (x'+m-\epsilon, x'+m+\epsilon). \end{aligned}$$

$m > 0$ ならば $\epsilon < m - \epsilon$ が成り立ち, $m < 0$ ならば $m + \epsilon < -\epsilon$ が成り立つ. 従って, $nV_x \cap n'V_x = \emptyset$ であり, 今考えている群作用は真性不連続である.

(b) 実数 ϵ を $0 < \epsilon < 1/2$ となるように選び, 各 $x \in X$ に対して, $V_x = (x-\epsilon, x+\epsilon) \times [-1, 1]$ と定める. すると, 上と同じ議論により, $nV \cap n'V = \emptyset$ であることが示せる.

問題 4. 群 G は位相空間 X に真性不連続に作用するので, 任意の $x \in X$ は以下の性質を満たす開近傍 $V \subset X$ を持つ: $g \neq 1 \Rightarrow V \cap gV = \emptyset$. $x \in V$ である一方で $gx \in gV$ であるので, $x \neq gx$ である. すなわち, 任意の $x \in X$ と任意の $g \in G$, $(g \neq 1)$ に対して $gx \neq x$ であるので, 群 G の X への作用は自由である.

問題 5.

(a) $\tilde{U} \subset X$ を開集合とする. $p : \tilde{X} \to X$ が被覆であることより, 各 $x \in p(\tilde{U}) \subset X$ に対して, $x \in U_x \subset X$ となる開集合 U_x であって,

(1) $p^{-1}(U_x) = \bigcup_{j \in J_x} \tilde{U}_x^j$,

(2) $j \neq j' \Rightarrow \tilde{U}_x^j \cap \tilde{U}_x^{j'}$,

(3) $p|_{\tilde{U}_x^j} : \tilde{U}_x^j \to U_x$ は同相である,

というものが存在する. すると, 次が成り立つ:

$$\tilde{U} = \bigcup_{x \in p(\tilde{U}), j \in J_x} \tilde{U}_x^j \cap \tilde{U}, \qquad p(\tilde{U}) = \bigcup_{x \in p(\tilde{U}), j \in J_x} p(\tilde{U}_x^j \cap \tilde{U}).$$

$\tilde{U} \subset X$ が開集合だったので, $\tilde{U}_x^j \cap \tilde{U}$ は $\tilde{U}_x^j$ の開集合である. (3) より $\tilde{U}_x^j \cap \tilde{U} \subset \tilde{U}_x^j$ は, p による像 $p(\tilde{U}_x^j \cap \tilde{U}) \subset U_x$ に同相である. 従って, $p(\tilde{U}_x^j \cap \tilde{U})$ は U_x の開集合である. U_x は X の開集合だったので, $p(\tilde{U}_x^j \cap \tilde{U})$ は X の開集合である. 結果として, $p(\tilde{U})$ は X の開集合 $p(\tilde{U}_x^j \cap \tilde{U})$, $(x \in p(U),\ j \in J_x)$ の和集合になっているので, $p(\tilde{U})$ 自身も開集合である.

(b) $\tilde{x} \sim \tilde{x}'$ ならば $p(\tilde{x}) = p(\tilde{x}')$ であるので, 連続写像 $p : \tilde{X} \to X$ から, 連続写像 $h : \tilde{X}/\sim \to X$ が, $h([\tilde{x}]) = p(\tilde{x})$ によって誘導される. p が全単射であることはすぐに確認できる. (a) より p は開写像なので, h も開写像である. すなわち, h は同相写像である.

問題 6. $p^{-1}(\bar{x})$ と G に全単射があることを言えばよい. 勝手な点 $x_0 \in p^{-1}(\bar{x})$ を選び, $f : G \to p^{-1}(\bar{x})$ を $f(g) = gx_0$ によって定める. $p : X \to X/G$ は自然な射影だったことから, $p^{-1}(\bar{x}) = \{x \in X | \exists g \in G, gx = x_0\}$ である. これより, f は全射であることがわかる. f が単射であることを示すために, $g, h \in G$, $g \neq h$ が与えられたとする. G の X への作用が自由だったことから, $h^{-1}gx_0 \neq x_0$ である. $h : X \to X$ は全単射であるので, $gx_0 \neq hx_0$ である. すなわち f は単射である.