

トポロジー 演習問題 (2019 年 6 月 12 日)

問題 1. 以下で与える群 G の位相空間 X への作用 $G \times X \rightarrow X$ について, 商空間 X/G の $x_0 \in X/G$ を基点とする基本群 $\pi_1(X/G, x_0)$ を求めよ.

(1) $G = \mathbb{Z}, X = \mathbb{R},$

$$G \times X \rightarrow X, \quad (n, x) \mapsto n + x. \quad x_0 = [0].$$

(2) $G = \mathbb{Z}^2, X = \mathbb{R}^2,$

$$G \times X \rightarrow X, \quad (n_1, n_2, x_1, x_2) \mapsto (n_1 + x_1, n_2 + x_2). \quad x_0 = [(0, 0)].$$

(3) $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}, X = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$

$$G \times X \rightarrow X, \quad (\pm 1, (x, y, z)) \mapsto \pm(x, y, z). \quad x_0 = [(1, 0, 0)].$$

(4) $G = \mathbb{Z}_3 = \{e^{\frac{2\pi ik}{3}} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z}\}, X = S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\},$

$$G \times X \rightarrow X, \quad (e^{\frac{2\pi ik}{3}}, (z, w)) \mapsto e^{\frac{2\pi ik}{3}}(z, w). \quad x_0 = [(1, 0)].$$

(5) $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}, X = \mathbb{R},$

$$G \times X \rightarrow X, \quad (\pm 1, x) \mapsto \pm x. \quad x_0 = [0].$$

問題 2. n 行 n 列の複素数係数行列 $M(n, \mathbb{C})$ の部分集合 $U(n)$ と $SU(n)$ を

$$U(n) = \{U \in M(n, \mathbb{C}) \mid UU^* = E\}, \quad SU(n) = \{U \in U(n) \mid \det U = 1\},$$

で定める. ただし, $U^* = {}^t\bar{U}$ は U の随伴行列で, E は単位行列である.

(a) $U(n)$ と $SU(n)$ は行列の積によって群になることを示せ.

(b) 3次元球面 $S^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=0}^3 x_i^2 = 1\}$ と $SU(2)$ の間に全単射があることを示せ. (ヒント: 任意の $U \in SU(2)$ は二つの複素数 u, v を用いて記述することができる.)

(c) 単射準同型 $U(1) \rightarrow SU(2)$ の例を構成せよ. (ヒント: 対角行列を考える.)

問題 3. 群 G とその部分群 $H \subset G$ が与えられたとき, H の G への作用 $H \times G \rightarrow G$ を $(h, g) \mapsto hg$ で定める. この作用は自由であることを示せ.

問題 4. 自然数 n に対し, 位数 n の巡回群を \mathbb{Z}_n と書く.

(a) 単射準同型 $\mathbb{Z}_n \rightarrow SU(2)$ の例を構成せよ.

(b) 基本群が \mathbb{Z}_n に同型であるような位相空間 X_n の例を構成せよ.

(c) 基本群が $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ に同型であるような位相空間 $X_{m,n}$ の例を構成せよ. (ヒント: 直積空間の基本群についての公式.)

以上.

解答例

問題 1.

- (1) 群作用は真性不連続であるので, 自然な射影 $p: X \rightarrow X/G$ は被覆である. 被覆空間 $X = \mathbb{R}$ は弧状連結で, その基本群は自明であるので, $\pi_1(X/G, x_0) \cong G = \mathbb{Z}$ となる.
- (2) (1) と同じ議論により, $\pi_1(X/G, x_0) \cong G = \mathbb{Z}^2$ である.
- (3) (1) と同じ議論により, $\pi_1(X/G, x_0) \cong G = \mathbb{Z}_2$ である.
- (4) (1) と同じ議論により, $\pi_1(X/G, x_0) \cong G = \mathbb{Z}_3$ である.
- (5) 商空間 X/G は, 半直線 $[0, +\infty)$ と同相であり, 特に可縮である. 従って $\pi_1(X/G, x_0) = \{1\}$ である.

問題 2.

- (a) $U, V \in U(n)$ に対して $(UV)(UV)^* = UVV^*U^* = UU^* = E$ が成り立つので, 積 $U(n) \times U(n) \rightarrow U(n)$ が定義されている. 行列の積の性質から, 任意の $U, V, W \in U(n)$ に対して, $(UV)W = U(VW)$ が成り立つ. また, 単位行列 E は $U(n)$ の要素であり, 任意の $U \in U(n)$ に対してその逆行列 $U^{-1} = U^*$ も $U(n)$ の要素である. すなわち, E を単位元とし, U^{-1} を U の逆元として, $U(n)$ は群の公理を満たしている.
- 一方で, $SU(n)$ が群であることを示すために, 行列式 $\det: U(n) \rightarrow U(1)$ は群の準同型であることを思い出す. $SU(n)$ はこの準同型の核と一致するので, $U(n)$ の部分群として, たしかに群である.
- (b) 任意の $U \in SU(2)$ は, $|u|^2 + |v|^2 = 1$ を満たす複素数 $u, v \in \mathbb{C}$ によって, $U = \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}$ の形に書ける. 従って,

$$S^3 \rightarrow SU(2), \quad (x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & -x_2 + ix_3 \\ x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}$$

という写像は S^3 から $SU(2)$ への全単射である.

- (c) $U(1) \rightarrow SU(2)$ を $u \mapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix}$ で定めると, これは単射準同型になっていることが確かめられる.

問題 3. 任意の $g \in G$ と $h \in H$, $h \neq 1$ に対して, $hg \neq g$ が成り立っているから, H の G への作用は自由である.

問題 4.

- (a) 例えば巡回群 \mathbb{Z}_n を $\mathbb{Z}_n = \{e^{2\pi ik/n} \in \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ と表すとき, $e^{2\pi ik/n} \mapsto \begin{pmatrix} e^{2\pi ik/n} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi ik/n} \end{pmatrix}$ は単射準同型の例である.
- (b) (a) の単射により, \mathbb{Z}_n を $SU(2)$ の部分群とみなす. また, 問題 2(b) により, $SU(2)$ を Hausdorff 位相空間 S^3 とみなす. すると, 問題 3 より, 群 \mathbb{Z}_n は Hausdorff 位相空間 $SU(2)$ に自由に作用する. この作用から, 被覆 $p: SU(2) \rightarrow SU(2)/\mathbb{Z}_n$ が定義される. $SU(2) \approx S^3$ の基本群は自明なので, 同型 $\mathbb{Z}_n \cong \pi_1(SU(2)/\mathbb{Z}_n)/p_*(\pi_1(SU(2))) \cong \pi_1(SU(2)/\mathbb{Z}_n)$ が得られる. すなわち, $SU(2)/\mathbb{Z}_n$ は X_n の例である.
- (c) 基本群の性質より, $(SU(2)/\mathbb{Z}_m) \times (SU(2)/\mathbb{Z}_n)$ は $X_{m,n}$ の例である.