

トポロジー 演習問題 (2019 年 6 月 19 日)

問題 1. \mathbb{R}^2 の部分空間 S^1 を以下で定める:

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

$S_1^1 = S^1$ および $S_2^1 = S^1$ とする. ある点 $p_1 \in S_1^1$ と $p_2 \in S_2^1$ を同一することにより, S_1^1 と S_2^1 から得られる位相空間を $S_1^1 \vee S_2^1$ とする. 基本群 $\pi_1(S_1^1 \vee S_2^1)$ の表示を求めよ.

問題 2. 位相空間 T^2 を, \mathbb{R}^2 の商空間として定める: $T^2 = \mathbb{R}^2 / \sim$. ただし同値関係 \sim は以下で与えられるものとする.

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{ある } m, n \in \mathbb{Z} \text{ が存在して,} \\ x' - x = m \text{ と } y - y' = n \text{ が成り立つ.} \end{array}$$

基本群 $\pi_1(T^2)$ の表示を求めよ.

問題 3. 位相空間 M を, $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ の商空間として定める: $M = (\mathbb{R} \times [-1, 1]) / \sim$. ただし同値関係 \sim は以下で与えられるものとする:

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{ある } n \in \mathbb{Z} \text{ が存在して,} \\ x' - x = n \text{ と } y' = (-1)^n y \text{ が成り立つ.} \end{array}$$

また, M の部分空間 ∂M を $\partial M = (\mathbb{R} \times \{-1, 1\}) / \sim$ で定める.

- (a) M と S^1 はホモトピー同値であることを示せ.
- (b) ∂M と S^1 は同相であることを示せ.
- (c) (b) で与えられる同相を $h: S^1 \rightarrow \partial M$ とする. また, $i: \partial M \rightarrow M$ を包含写像とする. これらの写像の合成 $ih: S^1 \rightarrow M$ が誘導する準同型 $(ih)_*: \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(M)$ を, $\pi_1(S^1)$ と $\pi_1(M)$ の適当な表示のもとで求めよ.

問題 4. \mathbb{R}^2 の部分空間 D^2 を以下で定める:

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$\partial M \subset M$ と $S^1 \subset D^2$ を同相を使って同一視することにより, M と D^2 から得られる位相空間を $M \cup D^2$ とする. 基本群 $\pi_1(M \cup D^2)$ の表示を求めよ.

問題 5. $i = 1, 2$ に対して, $M_i = M$ および $\partial M_i = \partial M$ とする. ∂M_1 と ∂M_2 を同一視することにより, M_1 と M_2 から得られる位相空間を $M_1 \cup M_2$ とする. 基本群 $\pi_1(M_1 \cup M_2)$ の表示を求めよ.

問題 6. \mathbb{R}^3 の部分空間 S^2 を以下で定める:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

S^2 の商空間として $\mathbb{R}P^2$ を定める: $\mathbb{R}P^2 = S^2 / \sim$. ただし同値関係 \sim は以下で与えられるものとする:

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \Leftrightarrow \begin{array}{l} (x, y, z) = (x', y', z') \text{ または,} \\ (x, y, z) = (-x', -y', -z') \text{ が成り立つ.} \end{array}$$

基本群 $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ の表示を求めよ.

以上.

解答例: いずれも Seifert-van Kampen の定理を使う.

問題 1. $X = S_1^1 \vee S_2^1$ とし, 同一視した p_1 と p_2 に対応する点を $p \in X$ とする. $i = 1, 2$ に対し, $S_i^1 \setminus \{p\} \subset X$ の点 q_i を選ぶ. すると, $U_1 = X \setminus \{q_2\}$ および $U_2 = X \setminus \{q_1\}$ は X の開集合であって $U_1 \cup U_2 = X$ を満たす. また, $S_i^1 \simeq S^1$ なので U_i は弧状連結である. さらに, $U_1 \cap U_2$ は可縮なので, 特に弧状連結である. U_i と $U_1 \cap U_2$ の基本群の表示

$$\pi_1(U_i) \cong \langle S_i | R_i \rangle, \quad \pi_1(U_1 \cap U_2) \cong \langle S | R \rangle$$

として, $S_i = \{a_i\}$, $R_i = \emptyset$, $S = R = \emptyset$ となるものを考える. 包含写像 $U_1 \cap U_2 \rightarrow U_i$ が誘導する準同型 $\varphi_i: \langle \emptyset \rangle \rightarrow \langle S_i | R_i \rangle$ のもとで, 空語の像は空語である. 空語は単位元に相当するので, $\pi_1(X)$ の表示として次が得られる:

$$\pi_1(X) = \langle a_1, a_2 | \{1\} \rangle.$$

しかし, 1 は自明な関係式なので, これを省略して, 最終的に次の表示を得る:

$$\pi_1(X) = \langle a_1, a_2 \rangle.$$

問題 2. $\epsilon = 1/100$ とし, 開集合 $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \subset \mathbb{R}^2$ を以下で定める:

$$\tilde{U}_1 = \bigcup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-m)^2 + (y-n)^2 \leq (1/10 + \epsilon)^2\},$$

$$\tilde{U}_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-m)^2 + (y-n)^2 \leq (1/10 - \epsilon)^2\}.$$

自然な射影 $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ による \tilde{U}_i の像を U_i とする: $U_i = \tilde{U}_i / \sim$. すると, U_i は開集合であり, $T^2 = U_1 \cup U_2$ を満たす. U_1 は可縮であり, $U_2 \simeq S^1 \vee S^1$ なので, いずれも弧状連結である. $U_1 \cap U_2 \simeq S^1$ も弧状連結である. これらの基本群の表示 $\pi_1(U_i) \cong \langle S_i | R_i \rangle$ と $\pi_1(U_1 \cap U_2) \cong \langle S | R \rangle$ は以下で与えられる:

$$\begin{cases} S_1 = \emptyset, \\ R_1 = \emptyset. \end{cases} \quad \begin{cases} S_2 = \{a, b\}, \\ R_2 = \emptyset. \end{cases} \quad \begin{cases} S = \{c\}, \\ R = \emptyset. \end{cases}$$

包含写像 $U_1 \cap U_2 \rightarrow U_i$ が誘導する準同型 $\varphi_i: \langle S | R \rangle \rightarrow \langle S_i | R_i \rangle$ は, $\varphi_1(c) = 1$ および $\varphi_2(c) = aba^{-1}b^{-1}$ と記述することができる. 従って, $\pi_1(T^2)$ は以下の表示を持つ:

$$\pi_1(T^2) \cong \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle.$$

問題 3.

(a) 写像 $f: S^1 \rightarrow M$ と $g: M \rightarrow S^1$ を以下で定める:

$$\begin{aligned} f: S^1 &\rightarrow M, & f(\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta) &= [\theta, 0], \\ g: M &\rightarrow S^1, & g([x, y]) &= (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x). \end{aligned}$$

すると $g \circ f = 1$ である. 一方で $f \circ g$ から恒等写像 id_M へのホモトピーが $F([x, y], t) = [x, ty]$ で与えられるので, M と S^1 はホモトピー同値である.

(b) $h: S^1 \rightarrow \partial M$ を $h(\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta) = [2\theta, 1]$ とすると, これは矛盾なく定義されており, さらに全単射であることが確かめられる. 連続写像 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(\theta \mapsto (2\theta, 1))$ から h が誘導されているので, h も連続である. また, S^1 はコンパクトである. M が Hausdorff であることは, 同値関係の定義から確かめられる. 従って, h は同相写像である.

- (c) (a) より, $\pi_1(M) \cong \pi_1(S^1) \cong \langle a \rangle$ と表示する. 同様に (b) より $\pi_1(\partial M) \cong \pi_1(S^1) \cong \langle b \rangle$ と表示する. b が代表する道は, $\ell : [0, 1] \rightarrow S^1$, $(\ell(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t))$ で与えられる. すると, $(ih_*\ell)(t) = [2t, 0]$ である. これは, ホモトピー同値 g が与える同型 $\pi_1(M) \cong \pi_1(S^1)$ のもとで, a^2 を代表している. 従って, $(ih)_* : \langle b \rangle \rightarrow \langle a \rangle$ は $(ih)_*(b) = a^2$ で与えられる.

問題 4. M と D^2 の開集合 V_1 と V_2 を以下のようにとる:

$$V_1 = \{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} \mid |x| > 1/10\} / \sim,$$

$$V_2 = \{(x, y) \in D^2 \mid x^2 + y^2 < 1/100\}.$$

$U_1 = M \cup V_2$ および $U_2 = V_1 \cup D^2$ とすると, これらは $M \cup D^2$ の開集合で $U_1 \cup U_2 = M \cup D^2$ を満たす. $U_1 \simeq M \simeq S^1$, $U_2 \simeq \{(0, 0)\}$ および $U_1 \cap U_2 \simeq \partial M \simeq S^1$ は弧状連結である. それぞれの基本群の表示 $\pi_1(U_i) \cong \langle S_i | R_i \rangle$ と $\pi_1(U_1 \cap U_2) \cong \langle S | R \rangle$ を次のようにとる:

$$\begin{cases} S_1 = \{a\}, \\ R_1 = \emptyset. \end{cases} \quad \begin{cases} S_2 = \emptyset, \\ R_2 = \emptyset. \end{cases} \quad \begin{cases} S = \{b\}, \\ R = \emptyset. \end{cases}$$

包含写像 $U_1 \cap U_2 \rightarrow U_i$ が誘導する準同型を $\varphi_i : \langle S | R \rangle \rightarrow \langle S_i | R_i \rangle$ とする. 問題 3 の結果から $\varphi_1(b) = a^2$ である. 一方で $\varphi_2(b) = 1$ である. 従って, 次の表示が得られる:

$$\pi_1(M \cup D^2) \cong \langle a | a^{-2} \cdot 1 \rangle \cong \langle a | a^2 \rangle.$$

問題 5. 問題 4 の場合と同様な方法で, $M_1 \cup M_2$ の弧状連結な開集合 U_1, U_2 であって, $U_i \simeq M_i$ および $U_1 \cap U_2 \simeq \partial M \approx S^1$ というものがとれる. 基本群の表示 $\pi_1(U_i) \cong \langle S_i | R_i \rangle$ と $\pi_1(U_1 \cap U_2) \cong \langle S | R \rangle$ を次のようにとる:

$$\begin{cases} S_1 = \{a_1\}, \\ R_1 = \emptyset. \end{cases} \quad \begin{cases} S_2 = \{a_2\}, \\ R_2 = \emptyset. \end{cases} \quad \begin{cases} S = \{b\}, \\ R = \emptyset. \end{cases}$$

包含写像 $U_1 \cap U_2 \rightarrow U_i$ が誘導する準同型を $\varphi_i : \langle S | R \rangle \rightarrow \langle S_i | R_i \rangle$ とする. 問題 2 の結果から $\varphi_i(b) = a_i^2$ である. 従って次の表示が得られる:

$$\pi_1(M_1 \cup M_2) \cong \langle a_1, a_2 | a_1^{-2} a_2^2 \rangle.$$

問題 6. S^2 の開集合 \tilde{U}_1 と \tilde{U}_2 を次のようにとる:

$$\tilde{U}_1 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid |z| < 3/4\},$$

$$\tilde{U}_2 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid |z| > 1/4\}.$$

自然な射影 $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ による \tilde{U}_i の像として, 開集合 $U_i \subset \mathbb{R}P^2$ を定める. これらの開集合について Seifert-van Kampen の定理を使うことができ, 問題 4 と同じ計算で, $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \langle a | a^2 \rangle$ が得られる. ($\mathbb{R}P^2$ は $M \cup D^2$ と同相であり, この同相のもとで, ここで選んだ U_i と問題 4 で選んだ U_i が同相になる.)