トポロジー 演習問題 (2019 年 7 月 24 日)

問題 1. $V = \{0,1,2,3,4\}$ を頂点集合とする次の単体複体 K を考える:

$$K = \left\{ \begin{array}{l} \{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}, \\ \{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,2,3\} \end{array} \right\}$$

以下の辺の道 ζ と同値な辺の道 ζ' で, ζ' を構成する辺の個数が最小のものを一つ答えよ.

[1] $\zeta = (0,1)(1,0)$.
[2] $\zeta = (1,2)(2,3)(3,1)$.
[3] $\zeta = (0,2)(2,3)(3,1)(1,0)$.
[4] $\zeta = (0,1)(1,3)(3,2)(2,1)(1,0)$.
[5] $\zeta = (0,1)(1,2)(2,3)(3,2)(2,3)(3,1)$.
[6] $\zeta = (0,1)(1,3)(3,2)(2,3)(3,1)(1,0)$.
[7] $\zeta = (0,1)(1,0)(0,2)(2,1)(1,3)(3,4)$.
[8] $\zeta = (0,2)(2,3)(3,1)(1,2)(2,3)(3,1)(1,2)$
[9] $\zeta = (0,1)(1,3)(3,1)(1,0)(0,2)(2,3)(3,1)$
[10] $\zeta = (0,1)(1,2)(2,0)(0,2)(2,3)(3,4)(4,3)(3,1)$

問題 2. K を n 次元単体とする.

[1] 頂点 $v, v' \in V(K)$ が与えられたとする. K の辺の道 ζ であって v を始点とし v' を終点とするものは, (v,v') に同値であることを示せ. (ヒント: 辺の個数についての数学的帰納法.)
[2] 任意の頂点 $v \in V(K)$ に対し, $E(K,v) \cong \{1\}$ を証明せよ.

問題 3. 単体複体 $K = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}\}$ に対し, $E(K,0) \cong \mathbb{Z}$ を証明せよ. (ヒント: 0 を基点とする閉じた辺の道 ζ に対して, ζ と同値な道 ζ' であって, ζ' を構成する辺の個数が最小のものを考える.)

問題 4. 単体複体 K の頂点 $v, v' \in V(K)$ に対して, v を始点とし v' を終点とする辺の道 ζ があったとする. このとき, $E(K,v)$ と $E(K,v')$ は同型であることを示せ.

問題 5. 単体写像 $\varphi : K_1 \to K_2$ が与えられたとする. K_1 の道

$$\zeta = (v_0,v_1)(v_1,v_2)\cdots(v_{n-1},v_n)$$

に対して, K_2 の道 $\varphi_*\zeta$ を

$$\varphi_*\zeta = (\varphi(v_0),\varphi(v_1))(\varphi(v_1),\varphi(v_2))\cdots(\varphi(v_{n-1}),\varphi(v_n))$$

で定める.

(a) 写像 $\varphi_* : E(K_1,v) \to E(K_2,\varphi(v))$, $([\zeta] \mapsto [\varphi_*\zeta])$ は矛盾なく定義された準同型であることを示せ.
(b) 別の単体写像 $\psi : K_2 \to K_3$ が与えられたとき, $(\psi\circ\varphi)_* = \psi_*\circ\varphi_*$ が成り立つことを示せ.

---

http://math.shinshu-u.ac.jp/~kgomi/class/index.html.

解答例

問題 1.

[1] $(0,0)$, [2] $(1,1)$, [3] $(0,2)(2,1)(1,0)$, [4] $(0,0)$, [5] $(0,1)$,
[6] $(0,0)$, [7] $(0,2)(2,3)(3,4)$, [8] $(0,2)$, [9] $(0,2)(2,1)$, [10] $(0,1)$.

問題 2.

[1] ζ を構成する辺の個数 N についての数学的帰納法で証明する. 個数が $N=1$ のとき, $\zeta=(v,v')$ ということであるから, ζ は (v,v') に明らかに同値である. v を始点とし v' を終点とする辺の道であって, それを構成する辺の個数が $N-1$ のものは, (v,v') に同値であると仮定する. ζ が v を始点とし v' を終点とする辺の道であって, ζ 構成する辺の個数が N 個のものだとする. このとき ζ の最初の辺に注目すると, 次の形になっている:

$$\zeta=(v,v_1)(v_1,v_2)(v_2,v_3)\cdots.$$

v,v_1,v_2 について, 場合分けして考える:

（１）$v=v_1$ のとき, $\zeta=(v,v)(v,v_2)(v_2,v_3)\cdots\sim(v,v_2)(v_2,v_3)\cdots$ である.

（２）$v=v_2$ のとき, $\zeta=(v,v_1)(v_1,v)(v,v_3)\cdots\sim(v,v)(v,v_3)\cdots$ である.

（３）$v_1=v_2$ のとき, $\zeta=(v,v_1)(v_1,v_1)(v_1,v_3)\cdots\sim(v,v_1)(v_1,v_3)\cdots$ である.

（４）上のいずれでもないとき, すなわち, v,v_1,v_2 が互いに異なる頂点であるとき, $\{v,v_1,v_2\}$ は K の単体であるので, $\zeta\sim(v,v_2)(v_2,v_3)\cdots$ である.

いずれの場合でも, ζ は辺の個数が $N-1$ 個の辺の道に同値であるので, 帰納法の仮定より, (v,v') に同値である. v を始点とし v' を終点とする任意の辺の道は (v,v') に同値である.

[2] 問題 2[1] の結果から, v を基点とする任意の閉じた辺の道 ζ は, $E(K,v)$ の単位元を代表する辺の道 (v,v) に同値である.

問題 3. 0 を基点とする K の閉じた辺の道 ζ が与えられたとする. ζ と同値な道であって, それを構成する辺の個数が最小のものを ζ' とする. 辺の道 η と η^{-1} を $\eta=(0,1)(1,2)(2,0)$ および $\eta^{-1}=(0,2)(2,1)(1,0)$ で定める. このとき, ζ' は, $\zeta'=\eta^n$, $(n\in\mathbb{Z})$ という形をしていることが示せれば, $[\zeta]=[\eta^n]\mapsto n$ によって同型写像 $E(K,0)\to\mathbb{Z}$ が得られることになる. 以下, ζ' がそのような形をしていることを示す: まず ζ' の最初の辺は $(0,v)$ という形をしている.

（１）もし $v=0$ であれば, $n=0$ の場合である.

（２）もし $v=1$ の場合には二番目の辺があり, $\zeta'=(0,1)(1,w)(w,w')\cdots$ という形をしている. $w=0,1$ の場合には, $\zeta'\sim(0,w)(w,w')\cdots$ となり ζ' の辺の個数が最小であるという仮定に矛盾する. 従って $w=2$ である. これより ζ' は三番目の辺を持ち, $\zeta'=(0,1)(1,2)(2,x)(x,x')\cdots$ という形をしている. もし $x=1,2$ であれば, ζ' はより辺の個数が少ない辺の道に同値であり, ζ' の仮定に矛盾する. 従って, $x=0$ であり, ζ' のはじめの三つの辺は η になっていることがわかる. もし ζ' に辺が三つしか含まれていなければ, $n=1$ の場合である. もし ζ' に四つ以上の辺が含まれている場合, 上と同様の議論により, $\zeta'=\eta(0,1)\cdots$ という形でなければならない. 従って, 上の議論を繰り返すことができ, ζ' の辺の個数は 3 の倍数で, $3n$ 個の辺が含まれている場合には, $\zeta'=\eta^n$ の形であることがわかる.

(3) もし $v=2$ の場合には, 上と同様の議論により, ζ' の辺の個数は 3 の倍数で, $3n$ 個の辺が含まれている場合には, $\zeta' = \eta^{-n}$ の形であることがわかる.

問題 4. v' を始点として v を終点とする辺の道を η とする. v を基点とする辺の道 ζ に対して, $\eta\zeta\eta^{-1}$ は v' を基点とする辺の道である. 逆に, v' を基点とする辺の道 ζ' に対して, $\eta^{-1}\zeta'\eta$ は v を基点とする辺の道である. これを踏まえて, 次の写像を考える:

$$\alpha : E(K,v) \to E(K,v'), \qquad [\zeta] \mapsto [\eta\zeta\eta^{-1}],$$
$$\alpha' : E(K,v') \to E(K,v), \qquad [\zeta'] \mapsto [\eta^{-1}\zeta'\eta].$$

α と α' は, いずれも矛盾なく定義された準同型写像で, 互いの逆写像になっていることが確かめられる. 従って, $E(K,v) \cong E(K,v')$ である.

問題 5.

(a) φ は単体写像であるので, (v,v') が K_1 の辺であれば $(\varphi(v),\varphi(v')$ は K_2 の辺である. また, ある単体 $s=\{v_0,\dots,v_q\} \in K_1$ に対して, $v,v',v'' \in s$ であれば, $\varphi(s)=\{\varphi(v_0),\dots,\varphi(v_q)\}$ は K_2 の単体であり, $\varphi(v),\varphi(v'),\varphi(v'') \in \varphi(s)$ である. これらから, φ_* は同値な辺の道を同値な辺の道に移すので, $\varphi_* : E(K_1,v) \to E(K_2,\varphi(v))$ は矛盾なく定義されている. v を基点とする閉じた辺の道 ζ と ζ' に対して, 明らかに $\varphi_*(\zeta\zeta') = \varphi_*(\zeta)\varphi_*(\zeta')$ が成り立つので, $\varphi_* : E(K_1,v) \to E(K_2,\varphi(v))$ は準同型写像である.

(b) 定義から,

$$(\psi\circ\varphi)_*((v_0,v_1)\cdots) = \psi((\varphi(v_0),\varphi(v_1))\cdots)$$

が成り立つので, K_1 の任意の辺の道 ζ に対して, $(\psi\circ\varphi)_*\zeta = \psi_*(\varphi_*\zeta))$ である. すなわち, $(\psi\circ\varphi)_* = \psi_*\circ\varphi_*$ である. 従って, $\varphi_* : E(K_1,v) \to E(K_2,\varphi(v))$ と $\psi_* : E(K_2,\varphi(v)) \to E(K_3,\psi(\varphi(v)))$ に対しても, $(\psi\circ\varphi)_* = \psi_*\circ\varphi_*$ が成り立つ.