Extended Topological Quantum Field Theory: a toy model

Kiyonori Gomi

Feb 20, 2007

話したいこと:

有限群を構造群とするゲージ理論

$\rightsquigarrow$

1. **位相的量子場の理論** (TQFT)
2. **その拡張**

D. Freed, "Higher algebraic structures and quantization", Comm. Math. Phys. 159 (1994) , no.2, 343–398.

目次:

§1 話のあらすじ

§2 格子ゲージ理論の設定/三角形分割

§3 作用汎関数/転入写像

§4 TQFT の構成/“幾何的量子化”

§5 圏化のおはなし

§6 今日の 2-ベクトル空間

§7 拡張の構成/“幾何的量子化の圏化”

§1 あらすじ

- 考える場の理論
- 位相的量子場の理論
- その拡張

考える場の理論

Dijkgraaf-Witten 理論
(有限群 Chern-Simons 理論)

$$\begin{cases} \Gamma & : \text{有限群} \\ M & : \text{コンパクト有向 (3 次元) 多様体} \end{cases}$$

場	$\leftrightarrow$	主 Γ 束
作用汎関数	$\leftrightarrow$	“Chern-Simons 不変量”
分配関数	$\leftrightarrow$	$Z_M = \dfrac{1}{\lvert\Gamma\rvert} \displaystyle\sum_{\gamma \in \mathrm{Hom}(\pi_1 M, \Gamma)} W(\gamma)$

$\boxed{\text{位相的量子場の理論 } (d\text{-次元})}$ $\cdots$ Atiyah の公理

“コボルディズムの圏” $\longrightarrow$ ベクトル空間の圏

- 対応づけ
$$\begin{cases} \Sigma^{d-1} & \longmapsto & H_\Sigma \ \ \mathbb{C}\text{-ベクトル空間} \\ M^d & \longmapsto & Z_M \in H_{\partial M} \end{cases}$$

- 公理
$$\begin{cases} \text{functorial} \\ \text{involutory} \quad H_{\Sigma^*} \cong (H_\Sigma)^* \\ \text{multiplicative} \\ \text{non-trivial} \quad H_\emptyset = \mathbb{C},\ Z_{\Sigma\times I} = \mathrm{id}_{H_\Sigma} \end{cases}$$

<u>Functorial</u> **向きを保つ微分同相は同型を導く**

- $$\Sigma \xrightarrow{\cong} \Sigma' \quad \Longrightarrow \quad H_\Sigma \xrightarrow{\cong} H_{\Sigma'}$$

- $$M \xrightarrow{\cong} M' \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} H_{\partial M} & \longrightarrow & H_{\partial M'} \\ Z_M & \mapsto & Z_{M'} \end{array}$$

Multiplicative

- $H_{\Sigma \sqcup \Sigma'} \cong H_\Sigma \otimes H_{\Sigma'}$

- $\partial M_1 = \Sigma_1 \sqcup \Sigma, \;\; \partial M_2 = \Sigma^* \sqcup \Sigma_2$

$$\begin{array}{ccc} H_{\Sigma_1} \otimes H_\Sigma \otimes H_\Sigma^* \otimes H_{\Sigma_2} & \longrightarrow & H_{\Sigma_1} \otimes H_{\Sigma_2} \\ Z(M_1) \otimes Z(M_2) & \mapsto & Z(M_1 \cup_\Sigma M_2) \end{array}$$

拡張 (Extended TQFT) D. Freed, R. Lawrence

「余次元 ≥ 2」の多様体も考える.

余次元 2 の場合:

$$\begin{cases} S^{d-2} \mapsto \mathscr{E}_S & \text{“2-ベクトル空間” (一種の圏)} \\ \Sigma^{d-1} \mapsto H_\Sigma \in \mathscr{E}_{\partial\Sigma} & \text{対象} \end{cases}$$

	境界なし	境界あり
余次元 0	Z_M 複素数	$Z_M \in H_{\partial M}$
余次元 1	H_Σ ベクトル空間	$H_\Sigma \in \mathscr{E}_{\partial\Sigma}$
余次元 2	$\mathscr{E}_S$ 圏	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

どんなことができるか?

Dijkgraaf-Witten 理論 (3 次元)

$\Downarrow$

ETQFT

$\mathscr{E}_{S^1}$ が braided monoidal category

$\Downarrow$

一種の量子群

(Dijkgraaf-Pasquier-Roche の準 Hopf 代数)

<u>以下やること</u>: ETQFT の具体的な構成方法の解説

- **構成自体は極めて簡単**

$\rightsquigarrow$ Chern-Simons **型理論の特質がよく見える**.

- **今日の構成は**, Freed **のもとの構成方法と多少違う**.

- Moore-Segal **の** open-closed TFT **との関連を調べて述べたかったが**, (**時間不足で**) **できなかった**.

§2 格子ゲージ理論の設定/三角形分割

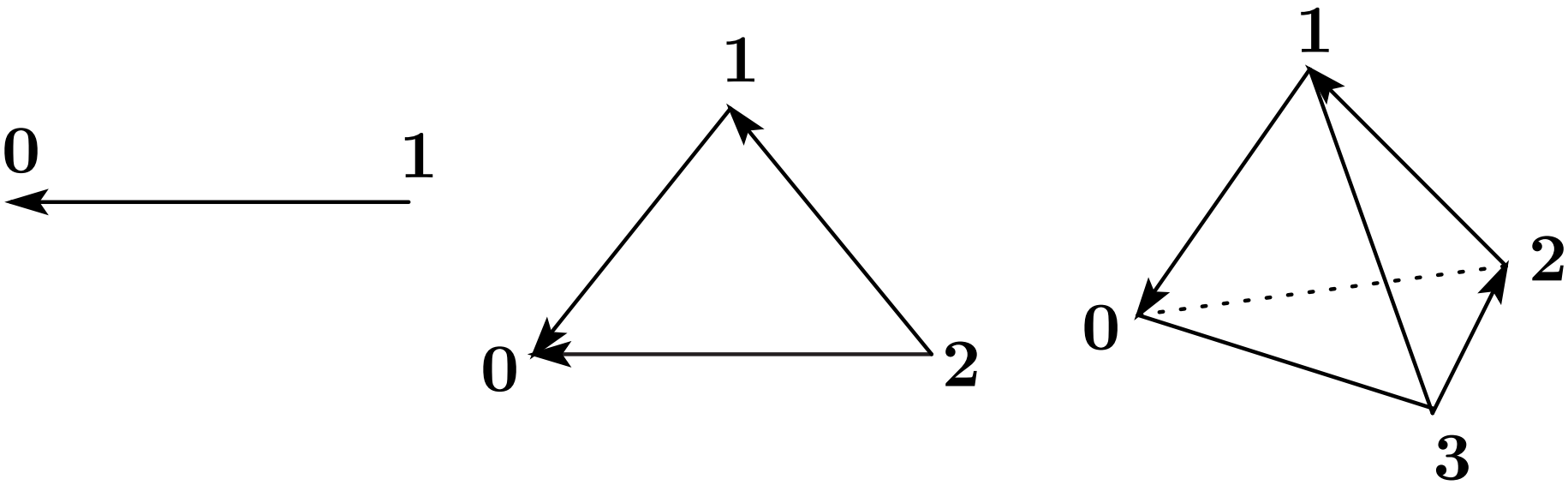
$$\begin{cases} \Gamma & \cdots & \text{有限群 (固定)} \\ M & \cdots & \text{多様体} \\ K & \cdots & M \text{ の “三角形分割”} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

“ゲージ場の空間” と “ゲージ群” を設定

多様体 M の “三角形分割” K

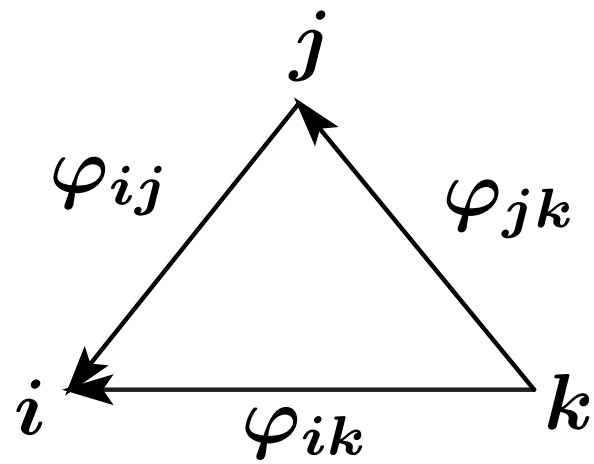
- 普通の意味での三角形分割
- 0-単体に番号付け
- 各 n-単体に番号付けから決まる向き



- **ゲージ場の空間** $\boxed{\mathcal{F}(K) = \{\varphi : K^{(1)} \to \Gamma \mid \text{平坦}\}}$

$$\varphi_{ij}\varphi_{jk}\varphi_{ki} = 1$$

$$\varphi(\sigma_{ij}) = \varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$$



- **ゲージ群** $\boxed{\mathcal{G}(K) = \mathrm{Map}(K^{(0)}, \Gamma)} \curvearrowright \mathcal{F}(K)$

$$\varphi_{ij} \mapsto (\gamma.\varphi)_{ij} = \gamma_i \varphi_{ij} \gamma_j^{-1}$$

- 主 Γ 束が与えられれば, σ_{ij} に沿った平行移動により, φ_{ij} が定まる.
- 逆の構成もできて:

$$\mathcal{F}(K)/\mathcal{G}(K) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1 M, \Gamma)/\Gamma$$

§3 作用汎関数/転入写像

- 場 $\varphi \in \mathcal{F}(K)$ に対し, 作用汎関数を導入したい.
(Dijkgraaf と Witten が与えたものとその一般化)

- ゲージ不変性等を一度に記述するために, “転入写像 (transgression map)” を使って導入する.

転入写像 (transgression map)

- K : コンパクト有向 $(d-k)$ 次元多様体の分割
- 次の準同型がある:

$$\tau_K : C^d(\Gamma; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to C^k(\mathcal{G}(K); C(\mathcal{F}(K), \mathbb{R}/\mathbb{Z}))$$

- "Stokes 型定理" $\tau_K \delta = (-1)^{d-k} \delta \tau_K + \tau_{\partial K}$

構成のアイデア $\tau_K\omega(\gamma_1,\ldots,\gamma_k;\varphi)\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

- $(\gamma_1,\ldots,\gamma_k,\varphi)\in\mathcal{G}(K)^k\times\mathcal{F}(K)$
  $\Rightarrow$ $|K|\times\Delta_k$ 上の主 Γ 束
- 主束 $\Rightarrow$ 分類写像
- $H^*(B\Gamma;\mathbb{R}/\mathbb{Z})\cong H^*(\Gamma;\mathbb{R}/\mathbb{Z})$
- $\begin{cases}\text{分類写像による chain } K\times\Delta_k \text{ の像}\\ \text{cochain } \omega\end{cases}$
  $\Rightarrow$ ペアリング

τ_K の具体的な表示: $k = 0$

$$\omega \in C^d(\Gamma, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \mapsto [\tau_K \omega : \mathcal{F}(K) \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}]$$

$$\tau_K \omega(\varphi) = \sum_{\sigma \in K^{(d)}} \epsilon_\sigma T_\sigma(\varphi)$$

$$\begin{cases} T_{\sigma_{01\cdots d}}(\varphi) = \omega(\varphi_{01}, \varphi_{12}, \cdots, \varphi_{d-1d}) \\ \epsilon_\sigma = \begin{cases} + & \sigma \text{ の向きが } M \text{ の向きと適合} \\ - & \text{そうでない} \end{cases} \end{cases}$$

τ_K の具体的な表示: $k=1$

$$\tau_K\omega : \mathcal{G}(K) \times \mathcal{F}(K) \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

$$\tau_K\omega(\gamma;\varphi) = \sum_{\sigma\in K^{(d-1)}} \epsilon_\sigma T_\sigma(\gamma;\varphi)$$

$$\begin{cases} T_{\sigma_{0\cdots d-1}}(\gamma;\varphi) = \sum_{j=0}^{d-1}(-1)^j T^j \\ T^j = \omega(\varphi'_{01},\cdot\cdot,\varphi'_{j-1j},\gamma_j,\varphi_{jj+1},\cdot\cdot,\varphi_{d-2d-1}) \\ \varphi'_{kk+1} = (\gamma\cdot\varphi)_{kk+1} = \gamma_k\varphi_{kk+1}\gamma_{k+1}^{-1} \end{cases}$$

τ_K の具体的な表示: $k = 2$

$$\tau_K\omega : \mathcal{G}(K) \times \mathcal{G}(K) \times \mathcal{F}(K) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

$\underline{d = 2,\ S = \mathrm{pt}}$ $\quad \tau_K\omega(\gamma, \eta; \varphi) = \epsilon_\sigma \omega(\gamma, \eta, \varphi)$

$\underline{d = 3,\ S = S^1}$ $\quad \tau_K\omega(\gamma, \eta; \varphi) = \sum_{\sigma \in K^{(1)}} \epsilon_\sigma T_\sigma$

$$T_\sigma = \omega(\gamma_0, \eta_0, \varphi_{01}) - \omega(\gamma_0, \eta_0\varphi_{01}\eta_1^{-1}, \eta_1)$$
$$+\omega(\gamma_0\eta_0\varphi_{01}\eta_1^{-1}\gamma_1^{-1}, \gamma_1, \eta_1)$$

作用汎関数 $\omega \in Z^d(\Gamma, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 固定

$$\begin{cases} M & : \text{コンパクト有向 } d \text{ 次元多様体} \\ K & : M \text{ の三角形分割} \end{cases}$$

$$S_K = \tau_K \omega : \mathcal{F}(K) \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

$$\partial M = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad S_K(\gamma.\varphi) = S_K(\varphi)$$

- M が境界を持つと, S_K は $\mathcal{G}(K)$ 不変でない.
- $d-1$ 次元多様体 Σ とその分割 K_Σ に対し:

$$b_{K_\Sigma} = \pm\tau_{K_\Sigma}\omega : \ \mathcal{G}(K_\Sigma) \times \mathcal{F}(K_\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

$$S_K(\gamma.\varphi) = S_K(\varphi) + r^* b_{\partial K}(\gamma;\varphi)$$
$$(r : \mathcal{G}(K) \to \mathcal{G}(\partial K),\ r : \mathcal{F}(K) \to \mathcal{F}(\partial K))$$

- Σ に境界がない時, b_{K_Σ} は $\mathcal{F}(K_\Sigma)$ 上の $\mathcal{G}(K_\Sigma)$ 同変直線束 $L_{b_{K_\Sigma}}$ を与える.
- S_{K_M} は $\mathcal{G}(K_M)$ 同変直線束 $r^* L_{b_{\partial K_M}}$ の自明化を与える.

$$
\begin{tikzcd}
L_{b_K} \arrow[d] & L_{b_{\partial K_M}} \arrow[d] & r^* L_{b_{\partial K_M}} \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathcal{F}(K) & \mathcal{F}(\partial K_M) & \mathcal{F}(K_M) \arrow[l, "r"']
\end{tikzcd}
$$

	境界なし	境界あり
余次元 0	S_K 0-cocycle	$\delta S_K = -r^* b_{\partial K}$
余次元 1	b_K 1-cocycle	$\delta b_K = r^* c_{\partial K}$
余次元 2	c_K 2-cocycle	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

§4 TQFT の構成/“幾何的量子化”

- 三角形分割つき多様体に対する TQFT を構成.
- 三角形分割への依存性を消す.

三角形分割つき TQFT

次の対応付けは, 三角形分割つき TQFT を与える:

- $(\Sigma^{d-1}, K) \mapsto$ ベクトル空間 $H_{(\Sigma,K)}$

$$H_{(\Sigma,K)} = \Gamma(\mathcal{F}(K), L_{b_K})^{\mathcal{G}(K)}$$

- $(M^d, K) \mapsto Z_{(M,K)} \in H_{(\partial M, \partial K)}$

$$Z_{(M,K)}(\varphi) = \frac{1}{|'K^{(0)}|} \sum_{\substack{\tilde{\varphi} \in \mathcal{F}(K) \\ \partial\tilde{\varphi} = \varphi}} e^{2\pi i S_K(\tilde{\varphi})}$$

<u>“involutry”</u> $(\Sigma, K) \rightsquigarrow (\Sigma^*, K^*),\ K^* = K$

$$\boxed{H_{(\Sigma^*,K^*)} \cong H^*_{(\Sigma,K)}}$$

- **構成より**: $H_{(\Sigma^*,K^*)} = \Gamma(\mathcal{F}(K), L^*_{b_K})^{\mathcal{G}(K)}$
- **非退化なペアリング**: $H_{(\Sigma^*,K^*)} \otimes H_{(\Sigma,K)} \to \mathbb{C}$

$$\langle \phi' \otimes \psi \rangle = \frac{1}{|K^{(0)}|} \sum_{\varphi \in \mathcal{F}(K)} \psi'(\varphi)\psi(\varphi)$$

分割への依存性

- $Z_{(M,K_M)}$, $H_{(\Sigma,K_\Sigma)}$ は $[\omega]$ のみに依存.
- ω を次のように正規化する:

$$\omega(\ldots,1,\ldots) = \omega(\ldots,\gamma,\gamma^{-1},\ldots) = 0$$

$\Rightarrow$ S_K は番号付けによらない.

- ω の cocycle 条件

$\Rightarrow$ $Z_{(M,K)}$ は, M の内部で K を細分しても不変.

- $\partial M = \emptyset \Rightarrow Z_{(M,K)}$ は K によらない.
- Σ の二つの分割 K, K' に対し,

$$Z_{\Sigma \times I} : H_{(\Sigma,K)} \to H_{(\Sigma,K')}$$

を使って $H_\Sigma = \varinjlim_K H_{(\Sigma,K)}$ とすると, $Z_M \in H_{\partial M}$ もうまく定まり, 最終的に TQFT が得られる.

例 (d = 2)

$$H_{S^1} \cong Z(\mathbb{C}^{\omega}[\Gamma])$$

例 (d = 3)

$$Z(T^3) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\substack{g,h,k \in \Gamma \\ [g,h]=[h,k]=[k,g]=1}} W(g,h,k)$$

$$W(g,h,k) = \frac{\omega(g,h,k)\omega(h,k,g)\omega(k,g,h)}{\omega(g,k,h)\omega(h,g,k)\omega(k,h,g)}$$

§5 圏化 (categorification) のおはなし

$$\text{集合} + \text{構造} \rightsquigarrow \text{圏} + \text{構造}$$

例 1　ベクトル空間の圏化

$\mathbb{C}$: 複素数の集合

$$\begin{cases} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \end{cases}$$

$\boldsymbol{E}$: ベクトル空間

$$\begin{cases} + : \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E} \\ \cdot : \mathbb{C} \times \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E} \end{cases}$$

$\mathscr{C}$: ベクトル空間の圏

$$\begin{cases} \oplus : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C} \\ \otimes : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C} \end{cases}$$

$\mathscr{E}$: “2-ベクトル空間”

$$\begin{cases} \oplus : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathscr{E} \\ \otimes : \mathscr{C} \times \mathscr{E} \to \mathscr{E} \end{cases}$$

例 2　積分の圏化

X：有限個の点集合

$$\begin{cases} \mathbb{C} \text{ 値関数 } f : X \to \mathbb{C} \\ \text{積分 } \sum_{x \in X} f(x) \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathscr{C} \text{ 値関数 } F : X \to \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \text{ベクトル束 } F = \bigcup F_x$$

$$\text{積分 } \bigoplus_{x \in X} F_x \in \mathscr{C} \quad \Leftrightarrow \quad \text{切断の空間 } \Gamma(X, F)$$

- ETQFT には, 直線束の切断の空間を圏化した, “2-直線束の切断の空間” があらわれると考えられる.
- 自明な直線束 $\underline{\mathbb{C}} \rightsquigarrow \Gamma(X, \underline{\mathbb{C}}) = \oplus_{x \in X} \mathbb{C}\langle x \rangle$.
- 自明な “2-直線束 $\underline{\mathscr{C}}$” $\rightsquigarrow \Gamma(X, \underline{\mathscr{C}}) = \oplus_{x \in X} \mathscr{C}\langle x \rangle$.
- これは, X 上のベクトル束の圏と同一視できる.

$\Rightarrow$ 今日は, ある種のベクトル束の圏として 2-ベクトル空間を定式化する.

§6 今日の 2-ベクトル空間

$$\begin{cases} G \curvearrowright X \ \cdots \ \text{有限群が有限集合に作用} \\ c : G \times G \times X \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ \cdots \ \text{2-cocycle} \end{cases}$$

- (E, ρ) : 捻れた G 同変ベクトル束

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E \to X \ \text{ベクトル束} \\ \rho(g; x) : E_x \to E_{gx} \ \text{同型} \\ \rho(g; hx)\rho(h; x) = e^{2\pi i c(g,h;x)}\rho(gh; x) \end{cases}$$

- $\mathscr{E}_G(X, c) =$ 捻れた G 同変ベクトル束の圏

- $\mathscr{E}_G(X, c)$ の形のものを 2-ベクトル空間と呼ぶ.
- $\oplus : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$, $\otimes : \mathscr{C} \times \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ がある.
- 2-ベクトル空間のテンソル積の定義:

$$\mathscr{E}_G(X, c) \otimes \mathscr{E}_H(Y, d) := \mathscr{E}_{G \times H}(X \times Y, c \boxplus d)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E}_G(X, c) \times \mathscr{E}_H(Y, d) & \longrightarrow & \mathscr{E}_G(X, c) \otimes \mathscr{E}_H(Y, d) \\ (E,\ F) & \longmapsto & E \boxtimes F \end{array}$$

- 以上の他に “双対空間” が ETQFT には必要.

積分/push-foward

- $\Phi : (G, X) \to (H, Y)$ に対し, 次の関手がある:

$$\Phi_! : \ \mathscr{E}_G(X, \Phi^* c) \to \mathscr{E}_H(Y, c)$$

- さらに $\Psi : (H, Y) \to (K, Z)$ があれば, 次の図式が自然同値を除いて可換になる:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}_G(X, \Phi^*\Psi^* c) \arrow[rr, "(\Psi\Phi)_!"] \arrow[dr, "\Phi_!"'] & & \mathscr{E}_K(Z, c) \\
& \mathscr{E}_H(Y, \Psi^* c) \arrow[ur, "\Psi_!"'] &
\end{tikzcd}$$

例 1 $Y = \mathrm{pt},\ H = \{1\},\ c = 0$

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E}_G(X) & \longrightarrow & \mathscr{C} \\ E & \mapsto & \Gamma(E)^G \end{array}$$

例 2 $X = Y = \mathrm{pt},\ c = 0$

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E}_G(\mathrm{pt}) & \longrightarrow & \mathscr{E}_H(\mathrm{pt}) \\ E & \mapsto & \Gamma(H, \underline{E})^G \end{array}$$

構成のスケッチ

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \Phi(G) \arrow[r, hook] \arrow[d] & H \arrow[d] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r, equal] & Y
\end{tikzcd}$$

- $I_\Phi : \mathscr{E}_G(X, \Phi^* c) \to \mathscr{E}_{\Phi(G)}(Y, c|_{\Phi(G)})$

$$(I_\Phi E)_y = \Gamma(\Phi^{-1}(y), E|_{\Phi^{-1}(y)})^{\mathrm{Ker}\Phi}$$

(応用上はここまでの構成で十分)

- $H' \subset H \curvearrowright Y \rightsquigarrow \mathscr{E}_{H'}(Y, c|_{H'}) \xrightarrow{A_H} \mathscr{E}_H(Y, c)$

$$(A_H E)_y = \Gamma(\partial_1^{-1}(y), \Lambda_c \otimes \partial_0^* E)^{H'}$$

$$\begin{tikzcd}
 & H \times Y \arrow[dl, "\partial_0", "\text{proj}"'] \arrow[dr, "\partial_1", "\text{mult}"'] & \\
Y & & Y
\end{tikzcd}$$

$$\Lambda_c = \underline{\mathbb{C}} \begin{cases} \partial_0^* c\text{-twisted}, (h, y) \longmapsto (h\eta^{-1}, \eta y) \\ \partial_1^* c\text{-twisted}, (h, y) \longmapsto (\eta h, y) \end{cases}$$

- 2-ベクトル空間の双対 $\mathscr{E}_G(X,c)^* := \mathscr{E}_G(X,-c)$

$$p_!\Delta^* : \mathscr{E}_G(X,c)^* \otimes \mathscr{E}_G(X,c) \to \mathscr{C}$$

$$\left(X \times X \xleftarrow{\Delta} X \xrightarrow{p} \mathrm{pt}\right)$$

$\mathscr{E}_G(X,c)^*$ の対象から関手 $\mathscr{E}_G(X,c) \to \mathscr{C}$ が得られる.

§5 ETQFT の構成/“幾何的量子化の圏化”

三角形分割つき ETQFT

次の対応づけは三角形分割つき ETQFT を与える.

- $(S^{d-2}, K) \mapsto$ 2-ベクトル空間 $\mathscr{E}_{(S,K)}$

$$\mathscr{E}_{(S,K)} = \mathscr{E}_{\mathcal{G}(K)}(\mathcal{F}(K), c_K)$$

- $(\Sigma^{d-1}, K) \mapsto H_{(\Sigma,K)} \in \mathscr{E}_{(\partial\Sigma,\partial K)}$

$$H_{(\Sigma,K)} = r_!(\underline{\mathbb{C}}, e^{2\pi i b_K})$$

<u>multiplicativity</u> $\partial\Sigma_1 = S_1 \sqcup S,\ \partial\Sigma_2 = S^* \sqcup S_2$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\Sigma_1) \times \mathcal{F}(\Sigma_2) \arrow[d, "r_1 \times r_2"'] & \mathcal{F}(\Sigma) \arrow[l, "\zeta"'] \arrow[r, equal] \arrow[d, "r \times j"'] & \mathcal{F}(\Sigma) \arrow[d, "r"'] \\
\mathcal{F}(\partial\Sigma) \times \mathcal{F}(S) \times \mathcal{F}(S^*) & \mathcal{F}(\partial\Sigma) \times \mathcal{F}(S) \arrow[l, "1 \times \Delta"'] \arrow[r, "p"] & \mathcal{F}(\partial\Sigma)
\end{tikzcd}$$

- $\zeta^*(b_{\Sigma_1} \boxplus b_{\Sigma_2}) = b_\Sigma$ **はすぐわかる.**
- $(1 \times \Delta)^*(r_1 \times r_2)_! \Rightarrow (r \times j)_! \zeta^*$ **を示せばよい.**
- **これは,** ζ **が単射で, 次の集合が一致することより.**
  $(r_1 \times r_2)^{-1}((1 \times \Delta)(\varphi)) = \zeta((r \times j)^{-1}(\varphi))$

- 分割への依存を除けば ETQFT になる.

1. K とその細分 K' を考えると $\mathcal{F}(K)$ と $\mathcal{F}(K')$ の間に自然な写像がある.
2. その写像で cocycle を比較すると, cochain が見つかる.
3. その cochain で同一視を作り単射極限をとる.

例 (d = 2)

- $\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\mathbf{pt}} = \Gamma$ の ω-射影表現の圏
- $H_{[0,1]} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ は, $E \mapsto (\mathbb{C}^{\omega}[\Gamma] \otimes E)^{\Gamma}$.
- $\mathbb{C}^{\omega}[\Gamma] = \bigoplus_{\mathbf{irep}} V_{\lambda} \otimes V_{\lambda}^{*}$ なので, $H_{[0,1]} \Rightarrow 1$.
- $[0, 1]$ の両端をつなぐ : $\mathbb{C}^{\omega}[\Gamma]/\mathbf{conj}$.

例 (d = 3)

- $\mathscr{E}_{S^1}$ は標準的な方法で $\mathscr{E} = \mathscr{E}_\Gamma(\Gamma, c)$ と同一視できる.
- pair of pants に対応する関手 $\mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ は, 群の掛け算 $\Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ による push-foward.

(cf. Freed-Hopkins-Teleman)