# Extended Topological Quantum Field Theory: a toy model

### 五味 清紀 \*

### 東京大学大学院数理科学研究科

### 1 はじめに

Atiyah の意味の位相的量子場の理論 (Topological Quantum Field Theory, TQFT) は、一言で言えば、多様体の不変量を与える枠組みである [1]. 位相的量子場の理論の例は幾つもあるが、その一つとして Dijkgraaf-Witten 理論から構成されるものがある [6, 7, 17]. Dijkgraaf-Witten 理論 [6] は、有限群を構造群とする Chern-Simons ゲージ理論 [18] とみなすことができる。この理論の大きな特徴は、構造群が有限群であることにより、通常は無限次元であるゲージ場の配位空間が有限個の点集合となり、経路積分が直接計算できてしまうことである。この単純さのために、位相的量子場の理論を構成する過程は、非常に見通しが良い。

通常の位相的量子場の理論では、余次元 1 までの多様体を考える。自然な拡張として、余次元 2 以上の多様体も含めたものが、ここでいう"位相的量子場の理論の拡張 (Extended TQFT)"である。そういったものは、例えば Freed [7] や Lawrence [14] によって得られている。論文 [7] において、Freed は Dijkgraaf-Witten 理論から位相的量子場の理論とその拡張を構成した。さらに、その拡張部分を用いて、Dijkgraaf-Pasquier-Rocheの準 Hopf 代数 [5] を再構成している。これは、場の理論から量子群を再構成した、見ることができる。普通 3 次元位相的量子場の理論の構成は量子群から出発するが、その逆に相当する構成を行ったのである。結果として、上の準 Hopf 代数から(普通の方法で)構成した 3 次元位相的量子場の理論が、Dijkgraaf-Witten 理論から構成した位相的量子場の理論と一致する、ということも従う。

本稿の目的は、上記のような位相的量子場の理論とその拡張の構成を解説することである。

ただし、本稿における構成方法は、[7](或いは [8]) における方法と異なる点がある。最も大きな違いは、本稿では多様体の三角形分割を用いる点である。Dijkgraaf-Witten 理論から位相的量子場の理論を構成する際には、[6,17] にあるように、三角形分割を用いる方法がある。本稿では、その構成方法を拡張する形で、位相的量子場の理論の拡張を構成する。もともとの論文 [7,8] では、三角形分割は用いられていない。三角形分割を用いる理由は、通常の Chern-Simons 理論の幾何的量子化との並行性を、より見えやすくするためである。

注意 1.1. "Extended TQFT" という言葉も Freed は使っていない. "位相的量子場の理論の拡張"を表すのに良い言葉見つからなかったので、Laurence の論文 [14] から借用して使っている.

注意 1.2. もともとの Dijkgraaf と Witten の論文 [6] では 3 次元多様体で理論を展開している。しかし、その論文中で触れられているとおり、任意の次元で同様な理論を展開することができる。そのため一般の次元における同様な理論も Dijkgraaf-Witten 理論と呼ぶことにする。

## 2 構成の概略

標語的に言えば、Dijkgraaf-Witten 理論の"古典論"を"量子化"することで、位相的量子場の理論 (TQFT) とその拡張 (ETQFT) を構成することができる.ここでは、この構成の流れを概説する.

<sup>\*</sup>kgomi@ms.u-tokyo.ac.jp

#### 2.1 位相的量子場の理論とその拡張

まず、位相的量子場の理論 (TQFT) 及びその拡張 (ETQFT) が大体どういうものかを説明する。位相的量子場の理論とは、一種のコボルディズムの圏からベクトル空間の圏への関手である。

定義 2.1 ([1]). d 次元位相的量子場の理論とは、次の対応付けであって公理 1-4 を満たすものである.

(d-1) 次元有向閉多様体  $\Sigma$   $\mapsto$   $H_{\Sigma}$  ( $\mathbb{C}$ -ベクトル空間) d 次元有向コンパクト多様体 M  $\mapsto$   $Z_M \in H_{\partial M}$  (ベクトル)

- 1. (Functorial) (d-1) 次元多様体の間の向きを保つ微分同相  $\Sigma \to \Sigma'$  は、同型  $H_\Sigma \to H_{\Sigma'}$  を誘導する. さらに、d 次元多様体の間の向きを保つ微分同相  $M \to M'$  が誘導する同型  $H_{\partial M} \to H_{\partial M'}$  は、 $Z_M \in H_{\partial M}$  を  $Z_{M'} \in H_{\partial M'}$  に移す.
- 2. (Involutory)  $\Sigma$  の向きをかえたものを  $\Sigma^*$  とするとき, 自然な同型  $H_{\Sigma^*}\cong (H_{\Sigma})^*$  がある.
- 3. (Multiplicative) (d-1) 次元多様体  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  に対して、自然な同型  $H_{\Sigma \sqcup \Sigma'}\cong H_\Sigma \otimes H_{\Sigma'}$  がある。また、d 次元多様体  $M_1$  と  $M_2$  があり、それぞれ境界が  $\partial M_1 = \Sigma_1 \sqcup \Sigma$ 、 $\partial M_2 = \Sigma^* \sqcup \Sigma_2$  だとする。 $M_1$  と  $M_2$  を  $\Sigma$  に沿って貼りあわせた多様体を M とするとき、 $H_\Sigma$  と  $H_\Sigma^*$  の自然なペアリングが導く写像  $H_{\partial(M_1\sqcup M_2)}\to H_{\partial M}$  は、 $Z_{M_1\sqcup M_2}$  を  $Z_M$  に移す。
- 4. (Non-trivial)  $H_{\emptyset} = \mathbb{C}, Z_{\Sigma \times [0,1]} = \mathrm{id}.$

上の公理では、あらわれる同型達が整合的振舞うことを暗に要請している。

公理の性質から, d 次元有向閉多様体 M に対して  $Z_M\in\mathbb{C}$  という不変量が得られることや,  $Z_M$  を求めるために M を (d-1) 次元多様体  $\Sigma$  に沿って切り開いて計算できることなどがわかる.

注意 2.2.  $\mathrm{TQFT}$  の向きに関する公理において、さらに  $H_\Sigma$  に  $\mathrm{Hermite}$  内積を導入して  $H_\Sigma^*$  と同一視し、 $Z_M=Z_{M^*}$  という性質を課すこともある. 本稿では簡略化のためこの性質は省略した.

TQFT の公理には, (d-1) 次元多様体, すなわち, 余次元 1 の多様体までしかでてこなかった. より高い余次元の多様体を考慮に入れるのが, ETQFT である. 例えば, 余次元 2 の多様体を含める場合には, さらに次の対応付けを考える:

(d-2) 次元有向閉多様体  $S\mapsto \mathscr{E}_S$  (一種の圏) (d-1) 次元有向コンパクト多様体  $\Sigma\mapsto H_\Sigma\in\mathscr{E}_{\partial\Sigma}$  (圏の対象)

(d-2) 次元多様体に対応するものは圏になる。このことは、次のように考えれば理解できるかも知れない: "数"、或いは、"点" が集まって "集合" をなし、"集合" が集まって "圏" をなす。d 次元多様体には "ベクトル" という点を対応させていた。ベクトルは集まってベクトル空間をなし、これは (d-1) 次元多様体に対応する "もの" を構成している。すると、(d-2) 次元多様体に対応する "もの" は、ベクトル空間が集まってできあがる "もの",すなわち、"圏" が自然である。

同様に考えると、(d-3) 次元多様体に対応させるべき "もの" は、"圏" が集まって構成する "もの" であり、 "2-圏" という概念があらわれる。 さらに同様に考えると、一般の余次元では "n-圏" の概念が登場する。 だが、 n-圏へ深入りしたくない (0, 筆者の理解不足もある) ので、本稿では 1-圏 (余次元 2) までしか扱わない。

 ${
m ETQFT}$  として余次元 2 までを考える場合,上に述べたような圏と対象の対応付けを考え,それらに  ${
m TQFT}$  の公理に相当するものを要請する.そのためには,(d-2) 次元多様体に対応させる圏は,ベクトル空間のような構造が必要である.実際,余次元 2 の多様体に対応させる圏は,"2-ベクトル空間"([11]) と呼ばれる圏である.2-ベクトル空間の例はベクトル空間のなす圏  ${\mathscr C}$  である.これらについては 5 節で説明する.

### 2.2 ETQFT の構成の概略

Dijkgraaf-Witten 理論から ETQFT を構成する流れを説明する。 きちんとした構成のためには、[6, 17] にあるように、多様体の三角形分割をとり、"格子ゲージ理論"の設定を用いる。 しかし、ここでは大体の流れ説明するのが目的なので、三角形分割は省略することにする。

d 次元の Dijkgraaf-Witten 理論では、次のデータをはじめに固定する:

- 有限群 □.

有限群  $\Gamma$  をとった時点で、任意の次元の有向コンパクト多様体 X (とその三角形分割) に対し、"ゲージ場の空間" としてある有限集合  $\mathcal{F}(X)$  が、そして、"ゲージ変換群" としてある有限群  $\mathcal{G}(X)$  が定まる。もし、X が境界を持てば、"制限" による自然な写像  $r:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(\partial X)$  と準同型  $r:\mathcal{G}(X)\to\mathcal{G}(\partial X)$  がある。

ここで、d-コサイクル $\omega$  を使うと、次のような対応付けを構成することができる:

```
d 次元有向コンパクト多様体 M \mapsto S_M \in C^0(\mathcal{G}(M); C(\mathcal{F}(M), \mathbb{R}/\mathbb{Z})), (d-1) 次元有向コンパクト多様体 \Sigma \mapsto b_\Sigma \in C^1(\mathcal{G}(\Sigma); C(\mathcal{F}(\Sigma), \mathbb{R}/\mathbb{Z})).
```

ただし,  $C^p(G; C(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z}))$  は, 空間 X 上の  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  値関数を係数とする 群 G の p-コチェインのなす群である. 上のコチェインは, M,  $\Sigma$  が境界を持たなければコサイクルになる.

これらのデータは、Dijkgraaf-Witten 理論の "古典論"に相当する。d 次元多様体 M に対応する 0-コチェイン(つまり関数) $S_M:\mathcal{F}(M)\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  は作用汎関数である。また、(d-1) 次元閉多様体  $\Sigma$  に対応する 1-コサイクル  $b_\Sigma$  は、 $\mathcal{F}(\Sigma)$  上の  $\mathcal{G}(\Sigma)$ -同変複素直線束  $L_{b_\Sigma}$  を定める。これは通常の Chern-Simons 理論の幾何的量子化で用いられる前量子化束の対応物である。 $S_M$  と  $b_\Sigma$  は  $\delta S_M = -r^*b_{\partial M}$  という関係で結ばれる。 $(\delta$  は群のコチェイン複体の境界作用素。)このことより、M に境界がなければ、 $S_M$  はゲージ変換群  $\mathcal{G}(M)$  の作用で不変である。M が境界を持つとき  $S_M$  は  $\mathcal{G}(M)$ -不変な関数ではない。しかし、 $e^{2\pi i S_M}$  を考えると、これは $\mathcal{F}(M)$  上の  $\mathcal{G}(M)$ -同変直線束  $r^*L_{b_{\partial M}}$  の同変切断になっている。こういった状況は、Chern-Simons 型の作用汎関数を持つ理論において、共通に見ることができる。

以上のデータをもとにした  $\mathrm{TQFT}$  の構成は大体次のとおりである: (d-1) 次元有向閉多様体  $\Sigma$  に対応させるベクトル空間  $H_\Sigma$  は、複素直線束  $L_{b_\Sigma}$  の同変切断の空間と定義する. d 次元有向コンパクト多様体 M に対応させるベクトル  $Z_M \in H_{\partial M}$  は、切断  $e^{2\pi i S_M}$  を境界条件を固定して積分することで定義する. 特に、M が境界を持たない場合、 $Z_M \in \mathbb{C}$  は、関数  $e^{2\pi i S_M}$  を  $\mathcal{F}(M)$  上で積分して得られる数となる. 既に述べたとおり、 $\mathcal{F}(M)$  は有限集合なので、積分といってもただの有限和である.

 $Z_M$  は、Dijkgraaf-Witten 理論において、経路積分によって与えた分配関数に相当する。今の場合、 $\mathcal{F}(M)$  が有限集合なので、通常は困難な経路積分が本当に実行できてしまう。また、上の  $H_\Sigma$  の構成は、普通の Chern-Simons 理論における幾何的量子化の類似になっている。ここでも、 $\mathcal{F}(\Sigma)$  が有限集合であるという事実により、通常の幾何的量子化の手順が大幅に単純化されている。

ここまでが、TQFTの構成の概略である。これを拡張してETQFTにする構成も大筋は同様である。まず "古典論"に相当する部分として、次のような対応付けを構成する:

```
(d-2) 次元有向コンパクト多様体 S \mapsto c_S \in C^2(\mathcal{G}(S); C(\mathcal{F}(S), \mathbb{R}/\mathbb{Z})).
```

もしS に境界がなければ,  $c_S$  はコサイクルになる。このコサイクルに自然な方法で圏を対応させることにより, (d-2) 次元有向閉多様体S に対応させる圏  $\mathcal{E}_S$  を定める。 $b_\Sigma$  とは,  $\delta b_\Sigma = r^*c_{\partial\Sigma}$  という関係で結ばれている。この関係式をもとに, (d-1) 次元有向コンパクト多様体 $\Sigma$  に対応させる対象 $H_\Sigma \in \mathcal{E}_{\partial\Sigma}$  を構成する。

注意 2.3. 1-コサイクル  $b_{\Sigma}$  は,同変複素直線束という幾何的な対象に対応した.同様に,2-コサイクル  $c_S$  は,同変 "2-直線束" という幾何的対象に対応すると考えることができる.形式的には,"2-直線束"とは "(ランク 1 0)2-ベクトル空間"をファイバーとするようなファイバー束と捉えることができる.従って,"切断の空間" として 2-ベクトル空間を自然に取り出すことができると期待できる.しかしながら,"2-直線束"(より一般には "2-ベクトル束" [3,4])の概念は現在発展途上であり,きちんと定まったものとは言い難い.そのため,本稿では結果として得られる(と期待される)圏を 2-コサイクルから直接構成するという方法をとる.

## 3 古典論

ここでは、前節で触れた "ゲージ場の空間"  $\mathcal{F}(X)$  と "ゲージ変換群"  $\mathcal{G}(X)$  を三角形分割を使ってきちんと定義する. また、作用汎関数  $S_M$  等を "転入写像" を使って構成する. これらは、"格子ゲージ理論" の設定において、Dijkgraaf-Witten 理論の古典論を与えていると考えることができる.

### 3.1 三角形分割

本稿における "多様体 X の三角形分割 K" とは次のようなものである:

- 普通の意味での三角形分割:
- 各 0-単体に番号付けが与えられている:
- 各単体は番号付けから決まる向きを持っている.

最後の番号付けから決まる向きとは以下のように定めるものである: 0-単体 (頂点) については任意に定める. n-単体  $(n \ge 1)$  に対しては、標準的な n-単体  $\Delta_n = \{(x_i) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_i \ge 0, \sum x_i \le 1\}$  と、番号付けから定まる標準的な同一視を使って向きを入れる. 例えば、1-単体に対しては、端点の番号が大きい方から小さい方へ向かう向きが入っている (図 1 参照).

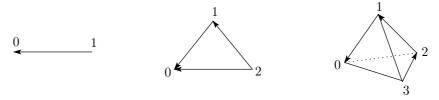


図 1: 番号付けによる単体の向き付け

Kのn-単体の集合を $K^{(n)}$ と書く、n-単体 $\sigma \in K^{(n)}$ はその(n+1)個の頂点に付けられた番号 $i_0,\ldots,i_n$ によって一意に指定することができるので、 $\sigma = \sigma_{i_0\cdots i_n}$ などと書く、この記法で向きの情報も同時に取り扱う、すなわち、 $i_0 < \ldots < i_n$ となっている場合に、 $\sigma_{i_0\cdots i_n}$ は上で取り決めた向きを持っているとする。 $i_0,\ldots,i_n$ を $\pi(i_0),\ldots,\pi(i_n)$ と置換した場合には、 $\sigma_{\pi(i_0)\cdots \pi(i_1)} = \operatorname{sgn}(\pi)\sigma_{i_0\cdots i_n}$ と定める。

注意 3.1. 多様体が滑らかならば、三角形分割をとることができる. (参考: [16])

### 3.2 ゲージ場の空間

定義 3.2. 有限群  $\Gamma$  を一つ固定する. 多様体 X とその三角形分割 K に対して  $\mathcal{F}(X,K)$  を次のように定める:

$$\mathcal{F}(X,K) = \{ \varphi : K^{(1)} \to \Gamma | \varphi(\sigma_{i_0 i_1}) \varphi(\sigma_{i_1 i_2}) = \varphi(\sigma_{i_0 i_2}), \forall \sigma_{i_0 i_1 i_2} \in K^{(2)}, (i_0 < i_1 < i_2) \}.$$

また、群  $\mathcal{G}(X,K)$  を  $\mathcal{G}(X,K) = \{\varphi : K^{(0)} \to \Gamma\}$  により定義する.

なお,  $K^{(1)}=\emptyset$  のとき  $\mathcal{F}(X,K)=\mathrm{pt},$  さらに  $K^{(0)}=\emptyset$  のとき  $\mathcal{G}(X,K)=\{1\}$  とおく.

以下, X が明らかな場合は,  $\mathcal{F}(X,K)=\mathcal{F}(K)$  などと書く. また, 記述の利便性のため,  $\varphi_{ij}=\varphi(\sigma_{ij})$ ,  $(\sigma_{ij}\in K^{(1)},\,i< j)$  とおき,  $\varphi_{ji}=\varphi_{ij}^{-1}$  と定める. 同様に,  $\gamma_i=\gamma(\sigma_i),\,(\sigma_i\in K^{(0)})$  と書く.

 $\mathcal{F}(X,K)$  を "ゲージ場 (接続) の空間" と見なせる根拠は、次の命題である:

命題 3.3. 多様体 X とその三角形分割 K に対して, X 上の主  $\Gamma$  束の同型類のなす集合  $\mathcal{M}(X)$  から, 商空間  $\mathcal{F}(K)/\mathcal{G}(K)$  への全単射が存在する.

証明. 写像  $\mathcal{M}(X) \to \mathcal{F}(K)/\mathcal{G}(K)$  の構成は以下の通りである. 多様体 X 上の主  $\Gamma$  束  $P \to X$  が与えられたとする.  $\Gamma$  が有限群なので P には自動的に平坦接続が定まっている. 各 0-単体  $\sigma_i$  において, P のファイバーの点  $\tilde{\sigma}_i \in P_{\sigma_i}$  をとる. 1-単体  $\sigma_{ij}$ , (i < j) に沿った平行移動  $PT_{\sigma_{ij}}: P_{\sigma_j} \to P_{\sigma_i}$  を用いると,  $PT_{\sigma_{ij}}(\tilde{\sigma}_j) = \tilde{\sigma}_i \varphi_{ij}$  を満たす  $\varphi_{ij} \in \Gamma$  が一意的に定まる. P の接続が平坦だったことにより, 任意の 2-単体  $\sigma_{ijk}$ , (i < j < k) に対して,  $\varphi_{ij}\varphi_{jk} = \varphi_{ik}$  が成立する. すなわち  $\varphi \in \mathcal{F}(K)$  が定まる. 各 0-単体のファイバーの点  $\tilde{\sigma}_i$  の取り替えが丁度  $\mathcal{G}(K)$  の作用に対応し, 写像  $\mathcal{M}(X) \to \mathcal{F}(K)/\mathcal{G}(K)$  が矛盾なく定まる.

この写像が全射であることを示すための鍵は, K から X のある開被覆  $\{U_i\}$  を作ると,  $\varphi_{ij}$  を変換関数として, 主  $\Gamma$  束を再構成できることである. 単射であることを示すための鍵は, X が連結であるとき, ホロノミーが定める全単射  $\mathcal{M}(X) \to \operatorname{Hom}(\pi_1(X),\Gamma)/\Gamma$  が,  $\mathcal{G}(K)/\mathcal{F}(K)$  を介して分解することである.

#### 3.3 転入写像

命題 3.4. 有限群  $\Gamma$  をとり固定する. (d-k) 次元コンパクト有向多様体 X とその三角形分割 K に対して、次の自然な順同型が存在する:

$$\tau_K: C^d(\Gamma; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \longrightarrow C^k(\mathcal{G}(K); C(\mathcal{F}(K), \mathbb{R}/\mathbb{Z})).$$

また、K を X の境界  $\partial X$  に制限して得られる三角形分割を  $\partial K$  と書くと、次の関係式が成り立つ:

$$\tau_K \delta = \delta \tau_K + (-1)^k \tau_{\partial K}.$$

この命題のために、補題を幾つか用いる.

多様体 X とその三角形分割 K に対して, 単体のなすチェイン複体を  $(C_*(K;\mathbb{Z}),\partial)$  と書く.

補題 3.5. 多様体 X, X' の三角形分割をそれぞれ  $K_X, K_{X'}$  とする.

- (a) 自然な方法で、 $X \times X'$  の三角形分割  $K_{X \times X'}$  を構成できる.
- (b) 自然なチェイン写像  $\mu: \ C_m(K_X;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} C_n(K_{X'};\mathbb{Z}) \to C_{m+n}(K_{X \times X'};\mathbb{Z})$  がある.

証明.  $K_X$  の m-単体  $\sigma_{i_0\cdots i_m}$  と  $K_{X'}$  の n-単体  $\sigma_{j_0\cdots j_n}$  に対して,  $\sigma_{i_0\cdots i_m}\times\sigma_{j_0\cdots j_n}$  を以下のように単体分割すればよい:

$$\sigma_{i_0\cdots i_m}\times\sigma_{j_0\cdots j_n}=\sum_{0\leq k_1\leq \cdots \leq k_m\leq n} (-1)^{k_1+\cdots +k_m}\sigma_{(i_0,j_0)\cdots (i_0,j_{k_1})(i_1,j_{k_1})\cdots (i_1,j_{k_2})\cdots (i_m,j_{k_m})\cdots (i_m,j_n)}$$

 $\mu$  は、 $\mu(\sigma_{i_0\cdots i_m}\otimes\sigma_{j_0\cdots j_n})$  を上の式の右辺で定義すればよい.

補題 3.6. 多様体 X とその三角形分割  $K_X$  が与えられらとする.  $\varphi\in\mathcal{F}(K_X)$  は、チェイン写像  $\varphi_*:C_m(K_X;\mathbb{Z})\to C_m(\Gamma;\mathbb{Z})$  を誘導する. ただし、 $(C_*(\Gamma;\mathbb{Z}),\partial)$  は群  $\Gamma$  のチェイン複体である.

証明. 
$$arphi_*(\sigma_{i_0\cdots i_m})=[arphi_{i_0i_1}|arphi_{i_1i_2}|\cdots|arphi_{i_{m-1}i_m}]$$
 と定義すればよい.

補題 3.7. 多様体 X の三角形分割を  $K_X$  とし、標準 k-単体  $\Delta_k$  の標準的な三角形分割を  $K_{\Delta_k}$  とする. このとき、自然な写像  $\mathcal{G}(K_X)^k \times \mathcal{F}(K_X) \to \mathcal{F}(K_{\Delta_k \times X})$  がある.

証明.  $\gamma_1,\ldots,\gamma_k\in\mathcal{G}(K_X),\, \varphi\in\mathcal{F}(K_X)$  に対して、 $\Phi\in\mathcal{F}(K_{\Delta_k\times X})$  を定めたい、そのためには、 $\sigma\in K^{(1)}_{\Delta_k\times X}$  に対して、 $\Phi(\sigma)\in\Gamma$  をしかるべく定めればよい、1-単体  $\sigma\in K^{(1)}_{\Delta_k\times X}$  には、次の 3 種類がある:

- (a)  $\sigma = \sigma_{i_0} \times \sigma_{j_0 j_1} = \sigma_{(i_0 j_0)(i_0 j_1)}, (\sigma_{i_0} \in K_{\Delta_b}^{(0)}, \sigma_{j_0 j_1} \in K_X^{(1)}, j_0 < j_1);$
- (b)  $\sigma = \sigma_{i_0 i_1} \times \sigma_{j_0} = \sigma_{(i_0 j_0)(i_1 j_0)}, (\sigma_{i_0 i_1} \in K_{\Delta_k}^{(1)}, \sigma_{j_0} \in K_X^{(0)}, i_0 < i_1);$
- (c) 上のもの以外.
- (a) の形の 0-単体に対しては, $\Phi(\sigma_{i_0} \times \sigma_{j_0 j_1}) = (\gamma_{i_0+1} \cdots \gamma_k \varphi)(\sigma_{j_0 j_1})$ , $(i_0 = 0, \ldots, k)$  とおく.(b) の形の 1-単体に対しては, $\Phi(\sigma_{i_0 i_1} \times \sigma_{j_0}) = (\gamma_{i_0+1} \cdots \gamma_{i_1})(\sigma_{j_0})$  とおく.ここまで決めると, $\Phi \in \mathcal{F}(K_{\Delta_k \times X})$  となる条件(2-単体の周りのホロノミーが消える)から,(c) の形の 1-単体  $\sigma$  に対する  $\Phi(\sigma)$  は自動的に決まる.

命題 3.4 の証明. まず  $\tau_K$  の構成を説明する.  $\omega \in C^d(\Gamma; \mathbb{R}/\mathbb{Z})$  および  $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \varphi) \in \mathcal{G}(K)^k \times \mathcal{F}(K)$  に対して,  $\tau_K \omega(\gamma_1, \ldots, \gamma_k; \varphi) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  を次のように定める:

$$\tau_K \omega(\gamma_1, \ldots, \gamma_k; \varphi) = \langle \omega | (\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \varphi)_* (\mu([\Delta_k] \otimes [X])) \rangle.$$

記号の意味は以下の通りである.  $\langle \ | \ \rangle$ :  $C_d(\Gamma; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times C^d(\Gamma; \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  は群  $\Gamma$  のコチェインとチェインの自然なペアリング.  $(\gamma_1, \dots, \gamma_k, \varphi)_*$ :  $C_d(K_{\Delta_k \times X}; \mathbb{Z}) \to C_d(\Gamma; \mathbb{Z})$  は、補題 3.6 と補題 3.7 から決まるチェイン写像.  $[\Delta_k] \in C_k(K_{\Delta_k}; \mathbb{Z})$  は  $\Delta_k$  そのものが定めるチェイン.  $[X] \in C_{d-k}(K; \mathbb{Z})$  は  $[X] = \sum_{\sigma \in K^{(d-k)}} \epsilon_\sigma \sigma$  と定めたチェイン. ただし、 $\epsilon_\sigma \in \{\pm 1\}$  は、 $\sigma \in K^{(d-k)}$  の向きが X の向きと一致するとき  $\epsilon_\sigma = 1$  で、一致しないときには  $\epsilon_\sigma = -1$  である. 以上のように  $\tau_K$  を定義すれば、命題 3.4 に述べられている式は容易に示せる.  $\Box$ 

#### 3.4 作用汎関数

前節で概説した Dijkgraaf-Witten 理論の汎関数等を, 以上の準備をもとにして導入する.

定義 3.8. 有限群  $\Gamma$  と d-コサイクル  $\omega \in Z^d(\Gamma; \mathbb{R}/\mathbb{Z})$  を固定する.

- (a) d 次元コンパクト有向多様体 M とその三角形分割 K に対して,  $S_K:\mathcal{F}(K)\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  を  $S_K=-\tau_K\omega$  で定義する.
- (b) (d-1) 次元コンパクト有向多様体  $\Sigma$  とその三角形分割 K に対して,  $b_K:\mathcal{G}(K)\times\mathcal{F}(K)\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  を  $b_K= au_K\omega$  で定義する.
- (c) (d-2) 次元コンパクト有向多様体 S とその三角形分割 K に対して,  $c_K:\mathcal{G}(K) imes\mathcal{G}(K) imes\mathcal{F}(K) o\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  を  $c_K= au_K\omega$  で定義する.

以上のコチェインが  $\delta S_K = -r^*b_{\partial K}, \, \delta b_K = r^*c_{\partial K}$  を満たすことは, 命題 3.4 から明らかである.

d=2,3 において、具体的な表示は以下のようになる:

• d = 2

$$\begin{split} S_K(\varphi) &= -\sum_{\sigma_{012} \in K^{(2)}} \epsilon_{\sigma_{012}} \omega(\varphi_{01}, \varphi_{12}), \\ b_K(\gamma; \varphi) &= \sum_{\sigma_{01} \in K^{(1)}} \epsilon_{\sigma_{01}} \left\{ \omega(\gamma_0, \varphi_{01}) - \omega(\gamma_0 \varphi_{01} \gamma_1^{-1}, \gamma_1) \right\}, \\ c_K(\gamma, \eta; \varphi) &= \epsilon_\sigma \omega(\gamma, \eta, \varphi). \end{split}$$

• d = 3

$$\begin{split} S_K(\varphi) &= -\sum_{\sigma_{0123} \in K^{(3)}} \epsilon_{\sigma_{0123}} \omega(\varphi_{01}, \varphi_{12}, \varphi_{23}), \\ b_K(\gamma; \varphi) &= \sum_{\sigma_{012} \in K^{(2)}} \epsilon_{\sigma_{012}} \left\{ \omega(\gamma_0, \varphi_{01}, \varphi_{12}) - \omega(\gamma_0 \varphi_{01} \gamma_1^{-1}, \gamma_1, \varphi_{12}) + \omega(\gamma_0 \varphi_{01} \gamma_1^{-1}, \gamma_1 \varphi_{12} \gamma_2^{-1}, \gamma_2) \right\}, \\ c_K(\gamma, \eta; \varphi) &= \sum_{\sigma_{01} \in K^{(1)}} \epsilon_{\sigma_{01}} \left\{ \omega(\gamma_0, \eta_0, \varphi_{01}) - \omega(\gamma_0, \eta_0 \varphi_{01} \eta_1^{-1}, \eta_1) + \omega(\gamma_0 \eta_0 \varphi_{01} \eta_1^{-1} \gamma_1^{-1}, \gamma_1, \eta_1) \right\}. \end{split}$$

以上の式の中にあらわれる  $\epsilon_\sigma$  は次のように定められている: n 次元有向多様体 X とその三角形分割 K の n-単体  $\sigma \in K^{(n)}$  に対して,  $\sigma$  と多様体の向きが同じならば  $\epsilon_\sigma = 1$  , 逆ならば  $\epsilon_\sigma = -1$  と定める.

# 4 TQFTの構成

ここでは、Dijkgraaf-Witten 理論から得られる TQFT を構成する。 2 節で述べたような TQFT を構成する前段階として、まず"三角形分割つき多様体に対する TQFT"を構成する。 その後で、三角形分割への依存性を取り除くことで、定義 2.1 にあるような TQFT が得られる。 なお、例は最後の節で与える。

### 4.1 三角形分割つき多様体に対する TQFT の構成

定理 4.1. 有限群  $\Gamma$  とその d-コサイクル  $\omega$  を固定して、次の対応付けを考える.

(a) (d-1) 次元有向閉多様体  $\Sigma$  とその三角形分割 L に、次のベクトル空間  $H_{(\Sigma,L)}$  を対応させる:

$$H_{(\Sigma,L)} = \{ \psi : \mathcal{F}(L) \to \mathbb{C} | \ \psi(\gamma,\varphi) = e^{2\pi i b_L(\gamma,\varphi)} \psi(\varphi), \ \forall (\gamma,\varphi) \in \mathcal{G}(L) \times \mathcal{F}(L) \}.$$

(b) d 次元有向コンパクト多様体 M とその三角形分割 K に、次の  $Z_{(M,K)} \in H_{\partial(\Sigma,K)}$  を対応させる:

$$Z_{(M,K)}(\varphi) = \frac{1}{|K^{(0)}|} \sum_{\substack{\tilde{\varphi} \in \mathcal{F}(K) \\ \partial \tilde{\varphi} = \varphi}} e^{2\pi i S_K(\tilde{\varphi})}.$$

ただし $, |K^{(0)}|$ はMの内部にあるKの0-単体の数である.

上の対応付けは、以下の性質を持つ:

- 1. (d-1) 次元多様体の間の向きを保つ微分同相  $f:\Sigma\to\Sigma'$  は,同型  $H_{(\Sigma,L)}\to H_{(\Sigma',f(L))}$  を誘導する. さらに,d 次元多様体の間の向きを保つ微分同相  $F:M\to M'$  が誘導する同型  $H_{\partial(M,K)}\to H_{\partial(M',F(K))}$  は, $Z_{(M,K)}$  を  $Z_{(M',F(K))}$  に移す.
- 2. 自然な同型  $H_{(\Sigma^*,L^*)}\cong H_{(\Sigma,L)}^*$  がある. ただし,  $L^*=L$  である.
- 3.~(d-1) 次元多様体とその三角形分割  $(\Sigma,L),~(\Sigma',L')$  に対して,自然な同型  $H_{(\Sigma\sqcup\Sigma',L\sqcup L')}\cong H_{(\Sigma,L)}\otimes H_{(\Sigma',L')}$  がある.また,d 次元多様体とその三角形分割  $(M_1,K_1)$  と  $(M_2,K_2)$  があり,境界において  $\partial(M_1,K_1)=(\Sigma_1,L_1)\sqcup(\Sigma,L),~\partial(M_2,K_2)=(\Sigma^*,L^*)\sqcup(\Sigma_2,L_2)$  だとする. $(M_1,K_1)$  と  $(M_2,K_2)$  を  $(\Sigma,L)$  に沿って貼りあわせて (M,K) が得られているとき, $H_{(\Sigma,L)}$  と  $H_{(\Sigma^*,L^*)}$  の自然なペアリングが 導く写像は, $Z_{(M_1,K_1)\sqcup(M_2,K_2)}$  を  $Z_{(M,K)}$  に移す.

証明. 1 番目の性質は、転入写像  $\tau_K$  が自然な写像であったことを思い出すと、構成から明らか. 2 番目の同型は  $H_{(\Sigma,L)}$  が次のような非退化双一次形式を持つことから従う.

$$\langle \cdot \rangle : H_{(\Sigma^*, L^*)} \otimes H_{(\Sigma, L)} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \psi' \otimes \psi \rangle = \frac{1}{|L^{(0)}|} \sum_{\varphi \in \mathcal{F}(L)} \psi'(\varphi) \psi(\varphi).$$

3番目の性質も $au_K$ の性質と $H_{(\Sigma,L)},\,Z_{(M,K)}$ の構成から容易に示せる.

定義 2.1 における 4 番目の公理 (non-trivial) に相当する性質は次の通りである:

補題 **4.2.** (d-1) 次元有向閉多様体とその三角形分割  $(\Sigma,L)$  が与えれたとする.  $\Sigma \times [0,1]$  に対して、補題 3.5 にあるような三角形分割 K をとる. このとき,  $Z_{(\Sigma \times [0,1],K)}: H_{(\Sigma,L)} \to H_{(\Sigma,L)}$  は恒等写像である.

証明.  $\varphi \sqcup \varphi' \in \mathcal{F}(\partial K)$  に対して、次の同一視ができる (参考: 補題 3.7).

$$\{\tilde{\varphi} \in \mathcal{F}(K) | \partial \tilde{\varphi} = \varphi \sqcup \varphi'\} \cong \{\gamma \in \mathcal{G}(L) | \gamma.\varphi = \varphi'\}.$$

上の同一視のもとで,  $S_K(\tilde{\varphi})=b_L(\gamma;\varphi)$  が成り立つ. 従って,  $\psi\in H_{(\Sigma,L)}$  に対して次を得る:

$$(Z_{(\Sigma\times[0,1],K)}\psi)(\varphi') = \frac{1}{|L^{(0)}|} \sum_{\varphi\in L} \sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{G}(L)\\ \gamma,\varphi=\varphi'}} \delta_{\gamma.\varphi,\varphi'} e^{2\pi i b_L(\gamma;\varphi)} \psi(\varphi) = \psi(\varphi').$$

ただし,  $\delta_{\gamma,\varphi,\varphi'}$  は,  $\gamma.\varphi=\varphi'$  のとき 1 でそれ以外は 0, というデルタ関数である.

## 4.2 TQFTの構成

三角形分割つきの TQFT から、三角形分割に依らない TQFT を構成する議論の概要は次の通りである.

1. 定理 4.1 の三角形分割つき  $\mathrm{TQFT}$  は、群のコサイクル  $\omega \in Z^d(\Gamma; \mathbb{R}/\mathbb{Z})$  を固定して構成した. (d-1)-コチェイン  $\theta$  に対し、d-コサイクル  $\omega' = \omega + \delta\theta$  から構成した三角形分割つき  $\mathrm{TQFT}$  は、 $\omega$  から構成したものと "同型" である. (適当な自然変換で移りあう.) 従って、 $\omega$  から構成した三角形分割つき  $\mathrm{TQFT}$  としての情報は、 $\omega$  のコホモロジー類のみに依存する. 一般に、d-コサイクル  $\omega$  はそのコホモロジー類の中で取り替えて、次のように正規化できる:

$$\omega(\ldots,1,\ldots)=\omega(\ldots,\gamma,\gamma^{-1},\ldots)=0.$$

そこで始めから正規化されたコサイクルをとったと仮定する.

- 2. d 次元多様体 M とその三角形分割 K に対して,M の内部で K を細分したものを K' とする.このとき  $\omega$  が正規化されていることとコサイクルであることから, $Z_{(M,K)}=Z_{(M,K')}$  が成り立つ.(特に, $\partial M=\emptyset$  ならば  $Z_{(M,K)}\in\mathbb{C}$  は K に依存せず,M の不変量になる.)
- 3.~(d-1) 次元多様体  $\Sigma$  の三角形分割 L,L' に対し、 $\Sigma \times [0,1]$  の三角形分割 K であって  $\partial K = L^* \sqcup L'$  となるものから、 $Z_{L',L}: H_{(\Sigma,L)} \to H_{(\Sigma,L')}$  という同型が得られる.これは K のとり方に依らない.また、定理 4.1 より、 $Z_{L'',L} \circ Z_{L',L} = Z_{L'',L}$  を満たすことがわかる.そこで  $\Sigma$  に対応させるベクトル空間  $H_{\Sigma}$  を、 $H_{\Sigma} = \bigcup_{L} H_{(\Sigma,L)}/\cong$  と定める.ただし  $\cong$  は  $Z_{L',L}$  達が定める同値関係である.
- 4. d 次元多様体 M とその三角形分割 K, K' に対して,  $Z_{\partial K',\partial K}(Z_{(M,K)})=Z_{(M,K')}$  が成り立つ. 従って, M に対して  $Z_M\in H_{\partial M}$  が矛盾なく定まる. 対応付け  $\Sigma\mapsto H_{\Sigma},\,M\mapsto Z_M$  が  $\mathrm{TQFT}$  になることは, 定理 4.1 の性質を用いると示すことができる.

注意 **4.3.** d=3 のとき、本稿における Dijkgraaf-Witten 理論からの TQFT の構成は、[17] における構成と、途中の過程で異なる。 しかし最終的に同じ TQFT が得られていることを確かめることができる.

### 5 2-ベクトル空間

ETQFT では、余次元 2 の多様体に "2-ベクトル空間" という圏を対応させるのであった. ここでは、本稿で用いる 2-ベクトル空間について説明する.

#### 5.1 圏化

数学においては、群、多様体など、なんらかの構造を持つ集合が考察の対象になることが多い。 おおまかに言えば、"圏化"とは「構造を持つ集合」を「構造を持つ圏」に持ち上げる、という考え方である。

例えば、複素数の集合 ℂ は環として次のような構造を持つ:

それぞれの演算には、単位元  $0 \in \mathbb{C}$  と  $1 \in \mathbb{C}$  がある.  $\mathbb{C}$  の一つの圏化は、(有限次元) ベクトル空間のなす圏  $\mathscr{C}$  である. これは複素数の演算に対応して、次のような関手を持つ:

直和 
$$\oplus$$
:  $\mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ , テンソル積  $\otimes$ :  $\mathscr{C} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ .

それぞれの"演算"には、単位元に相当する対象として、 $\{0\} \in \mathscr{C}$  及び  $\mathbb{C} \in \mathscr{C}$  がある.

上の圏化をもとにすると、空間 X 上のベクトル束は、複素数値関数を圏化したものと考えることができる: 簡単のため、X は有限集合だとする。すると、関数  $f:X\to\mathbb{C}$  とは、複素数の族  $\{f(x)\}_{x\in X}$  と情報として同等である。形式的に  $f:X\to\mathbb{C}$  を圏化したものは、 $F:X\to\mathscr{C}$  という関手である。(X は、X の元を対象として、射が恒等射しかない圏とみなせる。)F の情報は、ベクトル空間の族  $\{F(x)\}_{x\in X}$  と同等である。これは、X が離散的なので、X 上のベクトル束とみなすことができる。さらに、上の状況では、ベクトル束の切断の空間をとるという操作  $F\mapsto \Gamma(X,F)=\oplus_{x\in X}F(x)$  を、複素数値関数の積分操作  $f\mapsto \sum_{x\in X}f(x)$  を圏化したもの、と解釈することもできる。

2-ベクトル空間とはベクトル空間を圏化したものである. C-ベクトル空間 E は次の構造を持っていた:

和 
$$+: E \times E \longrightarrow E$$
、 スカラー積  $: \mathbb{C} \times E \longrightarrow E$ .

これを圏化したものは、圏 & であって、上の演算に対応する次の関手を持つものである:

"直和" 
$$\oplus$$
:  $\mathscr{E} \times \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ , "スカラー積"  $\otimes$ :  $\mathscr{E} \times \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ .

きちんとした 2-ベクトル空間の定義 ([11]) では、上のような関手が "分配法則" 等の性質を満たすことを要請する。しかしながら、本稿ではそういった定義は述べない。 きちんと述べるのはそれなりに紙数を消費するし、本来の目的であった ETQFT の構成のためには、2-ベクトル空間の "双対空間" や "テンソル積" などもさらに導入する必要がある。そこで、こういった定義を長々と述べる代わりに、次小節で説明するような、ある具体的な方法で構成をした圏をもって 2-ベクトル空間とする方針をとる。

#### 5.2 捻れたベクトル束の圏

本稿では次に定義されるタイプの圏を 2-ベクトル空間の意味で使うことにする.

定義 5.1. 有限集合 X に有限群 G が作用していたする.

(a) 2-コサイクル  $c\in Z^2(G;C(X,\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$  で捻られた X 上の G-同変ベクトル束とは、X 上のベクトル束  $E\to X$  と同型  $\rho(g;x):E_x\to E_{gx},\ (g\in G,x\in X)$  であって、

$$\rho(g; hx)\rho(h; x) = e^{2\pi i c(g, h; x)}\rho(gh; x)$$

を満たすものの対  $(E, \rho)$  のことである.

(b) X 上の c で捻られた G-同変ベクトル束のなす圏を  $\mathscr{E}_G(X;c)$  と書く. (射は、ベクトル束の間の写像であって、"捻れた群作用"  $\rho$  を保つものである.)

例えば、c=0 ならば、 $\mathcal{E}_G(X;c)$  は X 上の通常の G-同変ベクトル束のなす圏である。一方、 $X=\mathrm{pt}$  ならば、 $\mathcal{E}_G(X;c)$  は  $c\in Z^2(\Gamma;\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  をコサイクルとする G の射影表現のなす圏である。さらに、 $G=\{1\}$  ならば、 $\mathcal{E}_G(X;c)$  はベクトル空間のなす圏  $\mathscr{E}$  と同一視できる。

圏  $\mathcal{E}_G(X;c)$  は、ベクトル束の直和とテンソル積によりに定まる次の関手を持つ:

$$\oplus: \mathscr{E}_G(X;c) \times \mathscr{E}_G(X;c) \longrightarrow \mathscr{E}_G(X;c), \qquad \otimes: \mathscr{E}_G(X;c) \times \mathscr{E}_G(X;c') \longrightarrow \mathscr{E}_G(X;c+c').$$

(これらにより、 $\mathscr{E}_G(X;c)$  は前小節で述べたような "2-ベクトル空間" の構造を持つことがわかる。)また、G-空間 X から H-空間 Y への同変写像  $\Phi:(G,X)\to (H,Y)$  に対し、pull-back 関手  $\Phi^*:\mathscr{E}_H(Y;c)\to\mathscr{E}_G(X;\Phi^*c)$  と push-foward 関手  $\Phi_!:\mathscr{E}_G(X;\Phi^*c)\to\mathscr{E}_H(Y;c)$  がある。(Push-forward の導入は次小節で行う。)

2-ベクトル空間の"テンソル積"と"双対空間"を、本稿では次のように定める:

$$\mathscr{E}_G(X;c_X)\otimes\mathscr{E}_H(Y;c_Y):=\mathscr{E}_{G\times H}(X\times Y;c_X+c_Y),\qquad \mathscr{E}_G(X;c)^*:=\mathscr{E}_G(X;-c).$$

明らかに、自然な関手  $\mathscr{E}_G(X;c_X) \times \mathscr{E}_H(Y;c_Y) \to \mathscr{E}_G(X;c_X) \otimes \mathscr{E}_H(Y;c_Y)$  がある.一方で、 $\mathscr{E}_G(X;c)^*$  の対象 は関手  $\mathscr{E}_G(X;c) \to \mathscr{C}$  を誘導する.実際、自然な "ペアリング" 関手を次のように定義することができる:

$$p_!\Delta^*: \mathscr{E}_G(X;c)^*\otimes \mathscr{E}_G(X;c)\longrightarrow \mathscr{C}.$$

ただし、 $\Delta: (G,X) \to (G \times G, X \times X)$  は対角写像であり、 $p: (G,X) \to (\{1\}, \mathrm{pt})$  である.

#### 5.3 Push-forward

前節で触れた push-foward は、圏  $\mathscr{E}_G(X;c)$  において "積分" に相当するものである。ここではその定義と性質について解説する。ここで登場する群 G や空間 X は、全て有限であると仮定する。単に  $\Phi:(G,X)\to (H,Y)$  と書いたら、これは G-空間 X から H-空間 Y への同変写像を表す。すなわち、写像  $\Phi:X\to Y$  であって、順同型  $\Phi:G\to H$  を介して、群作用を保つ写像のことである。

補題 **5.2.** 同変写像  $\Phi: (G,X) \to (H,Y)$  であって,  $\Phi: G \to H$  が全射なものに対し、次の関手が存在する:

$$I_{\Phi}: \mathscr{E}_G(X; \Phi^*c) \longrightarrow \mathscr{E}_H(Y; c).$$

証明. 捻れたベクトル束  $(E,\rho)\in\mathscr{E}_G(X;\Phi^*c)$  に対し,  $(E',\rho')\in\mathscr{E}_H(Y;c)$  を以下のように定める. ベクトル束  $E'\to Y$  の  $y\in Y$  におけるファイバー  $E'_y$  は次のとおりである:

$$E'_y = \Gamma(\Phi^{-1}(y), E|_{\Phi^{-1}(y)})^{\text{Ker}\Phi}.$$

同型  $\rho'(h;y):E'_y\to E'_{hy}$  は,  $\Phi(g)=h$  となる  $g\in G$  の,  $\rho$  を介した E の切断の空間への作用を用いて定める. すると, 対応付け  $(E,\rho)\mapsto (E',\rho')$  は捻れベクトル束の写像を保ち, 関手  $I_\Phi$  を与える.

G-空間 X が与えられたとき,  $g \in G$  は  $(\gamma, x) \in G \times X$  へ二種類の方法で作用する:

左作用 
$$(\gamma, x) \mapsto (g\gamma, x)$$
, 対角作用  $(\gamma, x) \mapsto (\gamma g^{-1}, gx)$ .

作用込みで G を考えるときは、 $G_L$  (左作用)、 $G_D$  (対角作用)と書く、これらの作用は明らかに交換する。また、  $\partial_i:G\times X\to X$  を  $\partial_0(\gamma,x)=x$ 、 $\partial_1(\gamma,x)=\gamma x$  と定める。これらの写像は、同変写像  $\partial_0:(G_L\times G_D,G\times X)\to (\{1\}\times G,X)$ 、及び  $\partial_1:(G_L\times G_D,G\times X)\to (G\times \{1\},X)$  を与える.

補題 5.3. G-空間 X と  $c \in Z^2(G; C(X; \mathbb{R}/\mathbb{Z}))$  に対し、複素直線束  $\Lambda_c \to G \times X$  が存在し次の性質を持つ:

- (i)  $-\partial_0^* c$  で捻られた  $G_D$ -同変ベクトル束  $(\Lambda_c, \pi_D)$  を与える.
- (ii)  $\partial_1^* c$  で捻られた  $G_L$ -同変ベクトル束  $(\Lambda_c, \pi_L)$  を与える.

証明.  $\Lambda_c = \underline{\mathbb{C}}, \pi_D(g; (\gamma; x)) = \exp(-2\pi i c(\gamma g^{-1}, g; x)), \pi_L(g; (\gamma, x)) = \exp 2\pi i c(g, \gamma; x)$  とすればよい. 口定義 5.4. H-空間 Y と部分群  $H' \subset H$  に対し、関手:

$$A_H^{H'}: \mathscr{E}_{H'}(Y;c) \longrightarrow \mathscr{E}_H(Y;c)$$

を次の関手の合成として定義する.

$$\mathscr{E}_{H'}(Y;c) \xrightarrow{\partial_0^*} \mathscr{E}_{H_L \times H'_D}(H \times Y; \partial_0^* c) \xrightarrow{\Lambda_c \otimes} \mathscr{E}_{H_L \times H'_D}(H \times Y; \partial_1^* c) \xrightarrow{I_{\partial_1}} \mathscr{E}_{H}(Y;c).$$

ただし,  $H'_D = H' \subset H_D$  である.

一般に、 $\Phi: (G,X) \to (H,Y)$  は次のように分解する:

$$G \longrightarrow \Phi(G) \hookrightarrow H$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$X \longrightarrow Y = Y.$$

定義 5.5. 同変写像  $\Phi:(G,X)\to (H,Y)$  に対し、push-forward 関手を  $\Phi_!=A_H^{\;\Phi(G)}\circ I_\Phi$  と定義する:

$$\Phi_!: \mathscr{E}_G(X; \Phi^*c) \longrightarrow \mathscr{E}_H(Y; c).$$

以上のように定義した push-forward 関手が持つ性質の幾つかを, 証明なしで述べておく:

命題 **5.6.** Push-forward 関手に対して以下が成立する.

(a) 同変写像  $\Phi:(G,X)\to (H,Y), \Psi:(H,Y)\to (K,Z)$  に対して、以下の自然同型 (自然変換であって関手の同型を導くもの) が存在する:

$$\begin{split} \Psi_! \circ \Phi_! \Rightarrow (\Psi \circ \Phi)_! & \mathscr{E}_G(X; \Phi^* \Psi^* c) \longrightarrow \mathscr{E}_K(Z; c), \\ \mathrm{id}_! \Rightarrow \mathrm{id} & \mathscr{E}_G(X; c) \longrightarrow \mathscr{E}_G(X; c), \\ \Phi_! \circ (\mathrm{id} \otimes \Phi^*) \Rightarrow \Phi_! \otimes \mathrm{id} & \mathscr{E}_G(X; \Phi^* c') \times \mathscr{E}_H(Y; c) \longrightarrow \mathscr{E}_H(Y; c' + c). \end{split}$$

- (b) G-空間 X に正規部分群  $N\subset G$  が自由に作用するとする. 自然な射影から得られる同変写像  $\pi:(G,X)\to (G/N,X/N)$  に対し、自然同型  $\pi_!\pi^*\Rightarrow \mathrm{id},\pi^*\pi_!\Rightarrow \mathrm{id}$  がある.
- (c) 同変写像  $\Phi:(G,X)\to (H,Y)$  であって,  $\Phi:G\to H$  及び  $\Phi:X\to Y$  が単射であるものに対して, 自然同型  $\Phi^*\Phi_!\Rightarrow \mathrm{id}$  がある.

注意 5.7. 同変直線束の切断の空間に対しても、push-forward  $\Phi_!$  を定義することができる。 1-コサイクル  $b \in Z^1(G; C(X; \mathbb{R}/\mathbb{Z}))$  が定める同変直線束を  $L_b$  と書き、その同変切断の空間を  $\Gamma(X, L_b)^G$  と書く。すると、同変写像  $\Phi: (G, X) \to (H, Y)$  に対して、push-forward は次のように定義される:

$$\Phi_!: \ \Gamma(X, \Phi^* L_b)^G \longrightarrow \Gamma(Y, L_b)^H, \qquad (\Phi_! s)(y) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} e^{2\pi i b(h; h^{-1}y)} \sum_{x \in \Phi^{-1}(h^{-1}y)} s(x).$$

# 6 ETQFTの構成

この節では4節で構成したTQFTの拡張を構成する. 例は7節で与える.

### 6.1 三角形分割つき多様体に対する ETQFT の構成

定理 6.1. 有限群  $\Gamma$  とその d-コサイクル  $\omega$  を固定して、次の対応付けを考える.

(a) (d-2) 次元有向閉多様体 S とその三角形分割 L に、次の圏を対応させる:

$$\mathscr{E}_{(S,L)} = \mathscr{E}_{\mathcal{G}(L)}(\mathcal{F}(L); c_L).$$

(b) (d-1) 次元有向コンパクト多様体  $\Sigma$  とその三角形分割 K に、次の対象を対応させる:

$$(H_{(\Sigma,K)}, \rho_{(\Sigma,K)}) = r_!(\underline{\mathbb{C}}, e^{2\pi i b_K}) \in \mathscr{E}_{\partial(\Sigma,K)}.$$

上の対応付けは、以下の性質を持つ:

- 1. (d-2) 次元多様体の間の向きを保つ微分同相  $f:S\to S'$  は,圏の同値  $\mathscr{E}_{(S,L)}\to\mathscr{E}_{(S',f(L))}$  を誘導する. さらに,(d-1) 次元多様体の間の向きを保つ微分同相  $F:\Sigma\to\Sigma'$  に対し,誘導された圏の同値  $\mathscr{E}_{\partial(\Sigma,K)}\to\mathscr{E}_{\partial(\Sigma',F(K))}$  による  $H_{(\Sigma,K)}$  の像は  $H_{(\Sigma',F(K))}$  と自然に同型になる.
- 2. 自然な圏の同値  $\mathscr{E}_{(S^*,L^*)}\cong\mathscr{E}_{(S,L)}^*$  がある.
- 3. (d-2) 次元多様体とその三角形分割 (S,L), (S',L') に対して, 自然な圏の同値

$$\mathscr{E}_{(S\sqcup S',L\sqcup L')}\cong\mathscr{E}_{(S,L)}\otimes\mathscr{E}_{(S',L')}$$

がある。 また、(d-1) 次元多様体とその三角形分割  $(\Sigma_1,K_1)$  と  $(\Sigma_2,K_2)$  があり、境界において  $\partial(\Sigma_1,K_1)=(S_1,L_1)\sqcup(S,L),\ \partial(\Sigma_2,K_2)=(S^*,L^*)\sqcup(S_2,L_2)$  だとする。 $(\Sigma_1,K_1)$  と  $(\Sigma_2,K_2)$  を (S,L) に沿って貼りあわせて  $(\Sigma,K)$  が得られているとき、 $\mathscr{E}_{(S,L)}$  と  $\mathscr{E}_{(S^*,L^*)}$  のペアリング関手による  $H_{(\Sigma_1,K_1)\sqcup(\Sigma_2,K_2)}$  の像は、 $H_{(M,K)}$  と自然に同型になる。

証明. 3 の後半以外は定義より明らかである. 3 の後半の証明を, 記号簡略化のため,  $S_1=S_2=\emptyset$ , と仮定して行う. (一般の場合も同様である.) まず、次の可換図式に注意する.

$$\mathcal{F}(\Sigma_{1}, K_{1}) \times \mathcal{F}(\Sigma_{2}, K_{2}) \xleftarrow{\zeta} \mathcal{F}(\Sigma, K) = \mathcal{F}(\Sigma, K)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad$$

ただし、 $\zeta$  と j は自然な包含写像  $\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2 \to \Sigma$  と  $S \to \Sigma$  からそれぞれ誘導されている. 構成から、

$$\zeta^*(r_1 \times r_2)^* c_{L \sqcup L^*} = j^* c_L,$$
  $\zeta^* b_{K_1 \sqcup K_2} = b_K,$ 

となることがわかる.従って、次の自然同型を示せればよい.

$$\Delta^* \circ (r_1 \times r_2)_! \Rightarrow j_! \circ \zeta^*.$$

これは、 $\zeta$  が単射であること、 $\varphi \in \mathcal{F}(L)$  に対して次の集合が一致すること:

$$(r_1 \times r_2)^{-1}(\Delta(\varphi)) = \zeta(j^{-1}(\varphi)),$$

および,  $(r_1 \times r_2)_! \zeta_! \Rightarrow \Delta_! j_!$  という自然同型があることを使うと示すことが出来る.

注意 **6.2.** 定理 4.1 も注意 5.7 で触れた push-forward を用いて定式化することができる.

### 6.2 ETQFTの構成

TQFT の場合と同様にして、定理 6.1 から三角形分割への依存性を取り除くと ETQFT が得られる.

定理 6.3 ([7]). 有限群  $\Gamma$  とその d-コサイクル  $\omega$  に対し, 次の対応付けを構成できる:

$$(d-2)$$
 次元有向閉多様体  $S\mapsto$  圏  $\mathscr{E}_S;$   $(d-1)$  次元有向コンパクト多様体  $\Sigma\mapsto$  対象  $H_\Sigma\in\mathscr{E}_{\partial\Sigma}.$ 

この対応付けは、以下の性質を持つ:

- 1. (d-2) 次元多様体の間の向きを保つ微分同相  $f:S\to S'$  は, 圏の同値  $\mathscr{E}_S\to\mathscr{E}_{S'}$  を誘導する. さらに, (d-1) 次元多様体の間の向きを保つ微分同相  $F:\Sigma\to\Sigma'$  に対し, 誘導された圏の同値  $\mathscr{E}_{\partial\Sigma}\to\mathscr{E}_{\partial\Sigma'}$  による  $H_\Sigma$  の像は  $H_{\Sigma'}$  と自然に同型になる.
- 2. 自然な圏の同値  $\mathscr{E}_{S^*}\cong\mathscr{E}_S^*$  がある.
- 3.~(d-2) 次元多様体 S,S' に対して、自然な圏の同値  $\mathscr{E}_{S\sqcup S'}\cong\mathscr{E}_S\otimes\mathscr{E}_{S'}$  がある。また、(d-1) 次元多様体  $\Sigma_1$  と  $\Sigma_2$  があり、境界において  $\partial\Sigma_1=S_1\sqcup S, \,\partial\Sigma_2=S^*\sqcup S_2$  だとする。 $\Sigma_1$  と  $\Sigma_2$  を S に沿って貼りあわせて  $\Sigma$  が得られているとき、 $\mathscr{E}_S$  と  $\mathscr{E}_{S^*}$  のペアリング関手による  $H_{\Sigma_1\sqcup\Sigma_2}$  の像は、 $H_{\Sigma}$  と自然に同型になる。

以下、証明の概略を述べる。ポイントとなるのは圏  $\mathscr{E}_S$  の構成である。まず次の補題に注意する。

補題 6.4. (d-2) 次元有向閉多様体 S の三角形分割 L,L' が与えられたとする.  $S \times [0,1]$  の三角形分割  $K_i$  であって  $\partial K_i = L^* \sqcup L'$  となるものに対し、定理 6.1 から得られる関手を  $H_i:\mathscr{E}_{(S,L)} \to \mathscr{E}_{(S,L')}$  とする. このとき自然同型  $\theta_{i,j}:H_j \Rightarrow H_i$  であって  $\theta_{i,j}\circ\theta_{j,k}=\theta_{i,k}$  となるものを構成できる.  $(K_j$  等は別の三角形分割.)

この補題は,  $S \times [0,1]$  を二つくっつけた多様体  $S \times S^1$  が, d 次元多様体  $S \times D^2$  の境界になっていることを用いると示せる (" $Z_{S \times D^2}$ " に相当するものを考えると, 補題の  $\theta_{ij}$  が構成できる.) が, 詳細は省略する.

上の補題を用いて, (d-2) 次元有向閉多様体 S に対応させる圏  $\mathscr{E}_S$  を次のように構成する:

- ullet  $\mathscr{E}_S$  の対象は  $\mathrm{Obj}(\mathscr{E}_S) = \coprod_L \mathrm{Obj}(\mathscr{E}_{(S,L)})$  とする. ただし L は S の勝手な三角形分割である.
- 対象  $E \in \mathscr{E}_{(S,L)}, \, E' \in \mathscr{E}_{(S,L')}$  に対して、射の集合  $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}_S}(E,E')$  を次の方法で定義する.
  - 1.~S の三角形分割  $L_{\alpha}$  に対して次のように定める:

$$\operatorname{Hom}_{\alpha}(E,E') = \bigsqcup_{K,K'} \operatorname{Hom}_{\mathscr{E}_{(S,L_{\alpha})}}(H_K(E),H_{K'}(E'))/\simeq.$$

ただし, K と K' は,  $S \times [0,1]$  の三角形分割であって,  $\partial K = L^* \sqcup L_\alpha$ ,  $\partial K' = L'^* \sqcup L_\alpha$  となるものである. また  $\simeq$  は補題 6.4 における自然同型を用いて定義される同値関係である.

2. S の三角形分割  $L_{\alpha}$ ,  $L_{\beta}$  に対して,  $S \times [0,1]$  の三角形分割 K であって  $\partial K = L_{\alpha}^* \sqcup L_{\beta}$  となるものから,同型  $F_{\alpha\beta}: \operatorname{Hom}_{\beta}(E,E') \to \operatorname{Hom}_{\alpha}(E,E')$  が導かれる.この写像は K のとり方によらない.そこで  $F_{\alpha\beta}$  が定める同値関係  $\cong$  を用いて,次のように定める:

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{E}_S}(E, E') = \bigsqcup_{L_{\alpha}} \operatorname{Hom}_{\alpha}(E, E') / \cong .$$

 $\operatorname{Hom}_{\mathscr{E}(S,L_{\alpha})}(H_K(E),H_{K'}(E'))$  における射の合成から、 $\operatorname{Hom}_{\mathscr{E}S}(E,E')$  における射の合成が定まる。また、各対象に対する恒等写像も明白な形で定義でき、 $\mathscr{E}S$  が圏になることを示せる。

こうして構成した圏  $\mathscr{E}_S$  を (d-2) 次元多様体 S に対応させたとき, (d-1) 次元多様体  $\Sigma$  に対応する対象  $H_\Sigma \in \mathscr{E}_{\partial\Sigma}$  を  $H_{(\Sigma,K)} \in \mathscr{E}_{\partial(\Sigma,K)}$  から矛盾無く定めることができる。圏  $\mathscr{E}_S$  に対する双対  $\mathscr{E}_S^*$  及びテンソル積  $\mathscr{E}_S \otimes \mathscr{E}_{S'}$  を,構成もとの  $\mathscr{E}_{(S,L)}^*$  及び  $\mathscr{E}_{(S,L)} \otimes \mathscr{E}_{(S',L')}$  を使って定めることにする。すると定理 6.3 の残りの性質は定理 6.1 から従う。

### 7 例

d=2 と d=3 の場合に、比較的簡単に計算できる例をあげる.

#### 7.1 d=2 の場合

一般に、2 次元 TQFT から Frobenius 代数と呼ばれる代数が得られ、この代数構造で 2 次元 TQFT は決定される(参考: [13])。Frobenius 代数とは、単位元を持つ可換で結合的な代数  $(A,\cdot)$  と非退化内積  $\langle \quad \rangle: A\otimes A\to \mathbb{C}$  の対であって、 $\langle (a\cdot b)\otimes c\rangle = \langle a\otimes (b\cdot c)\rangle$  が  $a,b,c\in A$  に対して成り立つものである。2 次元 TQFT と Frobenius 代数との関係は、 $A=H_{S^1}$  である。三つ穴の球面(pair of pants)が A の積構造に、シリンダーが非退化内積に、そして円板  $D^2$  が単位元に対応する。

d=2 の場合,群  $\Gamma$  の 2-コサイクル  $\omega$  から 2 次元  $\mathrm{TQFT}$  が得られる.これに対応する Frobenius 代数を具体的に計算してみる. $S^1$  の三角形分割 L をとると, $H_{S^1}$  と  $H_{(S^1,L)}$  の間の同型が得られる.そこで,三角形分割として 3 つの 0-単体と 3 つの 1-単体で与えられるものを考える(図 2 参照).この三角形分割に対して, $\mathcal{F}(L)=\mathcal{G}(L)=\Gamma^3$  である.ここで, $\mathcal{G}(L)$  の部分群  $\mathcal{G}'(L)=\{\gamma:K^{(0)}\to\Gamma|\ \varphi(\sigma_0)=1\}\cong\Gamma^2$  を考えると,これは  $\mathcal{G}(L)$  の正規部分群であって  $\mathcal{F}(L)$  に自由に作用する.(同様の主張が,連結な多様体 X の三角形分割 K に対して一般に成立する.)

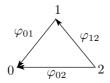


図 2: S<sup>1</sup> の三角形分割

ベクトル空間  $H_{(S^1,L)}$  は、 $\mathcal{F}(L)$  上の  $\mathcal{G}(L)$ -同変直線束の同変切断の空間として定義された。 上の注意より、 $H_{(S^1,L)}$  は、 $\mathcal{F}(L)/\mathcal{G}'(L)$  上の  $\mathcal{G}(L)/\mathcal{G}'(L)$ -同変直線束の切断の空間と同型になる。  $\Gamma$  と  $\mathcal{F}(L)/\mathcal{G}'(L)$  の同一視を、単射  $\Gamma \to \mathcal{F}(L)$ 、 $\varphi \mapsto (\varphi_{01},\varphi_{12},\varphi_{02}) = (1,\varphi,1)$  から誘導されるものを用いて行う。 対応する  $\Gamma$  と  $\mathcal{G}(L)/\mathcal{G}'(L)$  の同一視は、対角写像  $\Gamma \to \mathcal{G}(L)$ 、 $\gamma \mapsto (\gamma,\gamma,\gamma)$  から誘導される。この同一視のもとで、 $H_{(S^1,L)}$  は次のベクトル空間 H と同一視できる。

$$H = \{ \psi : \Gamma \to \mathbb{C} | \ \psi(\gamma \varphi \gamma^{-1}) = e^{2\pi i b(\gamma; \varphi)} \psi(\varphi), \ \forall (\gamma, \varphi) \in \Gamma \times \Gamma \}.$$

ただし,  $b \in Z^2(\Gamma; C(\Gamma, \mathbb{R}/\mathbb{Z}))$  は次で定義される.

$$b(\gamma;\varphi) = \omega(\gamma,\varphi) - \omega(\gamma\varphi\gamma^{-1},\gamma) = \omega(\gamma,\varphi) + \omega(\gamma\varphi,\gamma^{-1}).$$

三つ穴の球面 (pair of pants) Y に対応するベクトル  $Z_Y \in H^*_{S^1} \otimes H^*_{S^1} \otimes H_{S^1}$  を計算するために, Y の三角形分割 K として, 図 3 にあるものを考える.  $\mathcal{G}(K)$  には,  $\mathcal{G}'(L) \times \mathcal{G}'(L) \times \mathcal{G}'(L)$  が正規部分群として含まれており,  $\mathcal{F}(K)$  に自由に作用する. 上で述べた同一視  $\mathcal{F}(L)/\mathcal{G}'(L) \cong \Gamma$  のもとで, 次のような同一視が得られる.  $(g=\varphi_{12},\,h=\varphi_{45},\,k=\varphi_{78}$  と対応している.)

$$\mathcal{F}(K)/(\mathcal{G}'(L)\times\mathcal{G}'(L)\times\mathcal{G}'(L)) = \{(g,h,k,a,b)\in\Gamma^5|\ b^{-1}hba^{-1}ga = k\}.$$

これを用いると、同一視  $H \cong H_{(S^1,L)}$  のもとで、 $Z_Y : \Gamma \times \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{C}$  は次のようになる.

$$Z_Y(g,h,k) = \sum_{\substack{a,b \in \Gamma \\ b^{-1}hba^{-1}qa = k}} \exp 2\pi i \{ \omega(b^{-1}hb, a^{-1}ga) + \omega(a^{-1}, g) + \omega(a^{-1}g, a) + \omega(h, b) + \omega(b^{-1}, hb) \}.$$

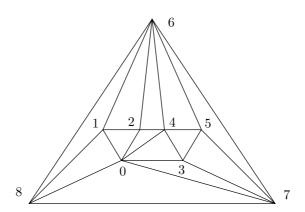


図 3: 3 つ穴球面の三角形分割  $(\sigma_{678}$  の分割から  $\sigma_{012}$  と  $\sigma_{345}$  を除く)

また、このベクトルに対応する写像  $Z_Y: H \otimes H \to H$  は、次のようになる.

$$(Z_Y(\psi \otimes \psi'))(k) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{g,h \in \Gamma} Z_Y(g,h,k)\psi(g)\psi'(h)$$
$$= \sum_{\substack{g,h \\ hg = k}} e^{2\pi i\omega(h,g)}\psi(g)\psi'(h) = \sum_{\substack{g,h \\ gh = k}} e^{2\pi i\omega(g,h)}\psi(g)\psi'(h).$$

2 次元円板  $D^2$  に対応する  $Z_{D^2}\in H_{S^1}$  は, H において  $1\in\Gamma$  に台を持つデルタ関数としてあらわせる. 従って, Y の一つの  $S^1$  を  $D^2$  で塞いだシリンダー C に対応する写像  $Z_C:H\otimes H\to\mathbb{C}$  は次で与えられる.

$$Z_C(\psi \otimes \psi') = \sum_{g \in \Gamma} \psi(g)\psi'(g^{-1}).$$

有限群  $\Gamma$  と 2-コサイクル  $\omega$  に対して、捻れた群環  $\mathbb{C}^\omega[\Gamma]$  という概念がある [12]. これは、 $\varepsilon_\gamma$ 、 $(\gamma \in \Gamma)$  を基底として、 $\varepsilon_\gamma \cdot \varepsilon_\eta = \exp 2\pi i \omega(\gamma,\eta) \varepsilon_{\gamma\eta}$  で定義される積を持つ代数である.ここまでの計算結果から、 $H_{S^1} \cong H$  に  $Z_Y$  から定まる積を導入した代数は、 $\mathbb{C}^\omega[\Gamma]$  の中心がなす部分代数と一致することがわかる.

次に d=2 のときに得られる  $\mathrm{TQFT}$  の拡張を見る。0 次元多様体  $\mathrm{pt}$  に対応する圏は  $\mathscr{E}_{\mathrm{pt}}=\mathscr{E}_{\Gamma}(\mathrm{pt},\omega)$  となる。つまり,  $\Gamma$  の射影表現であって, $\omega$  をコサイクルとするもののなす圏である。境界を持つ 1 次元多様体 [0,1] に対応する対象  $H_{[0,1]}$  は, $\mathbb{C}^{\omega}[\Gamma]$  を,左右の  $\Gamma$  作用によって  $\Gamma \times \Gamma$  の射影表現とみなしたものとなる。

 $\Gamma$  の既約射影表現であって  $\omega$  をコサイクルとするものは、ある有限個の既約表現  $V_{\lambda}$ ,  $(\lambda=1,\ldots,n)$  のどれ かに同型である.  $\Gamma \times \Gamma$  の射影表現として,  $\mathbb{C}^{\omega}[\Gamma]=\oplus_{\lambda=1}^{n}V_{\lambda}\otimes V_{\lambda}^{*}$  と分解する. 従って, 対象  $H_{[0,1]}$  が導く関手  $H_{[0,1]}:\mathscr{E}_{\mathrm{pt}}\to\mathscr{E}_{\mathrm{pt}}$  は恒等関手に自然同型である.

注意 7.1. [15] において、open/closed topological field theory という概念が導入された。これも TQFT の一つの拡張であり、通常の TQFT において余次元 1 の多様体として閉じたものしか考えないところを、開いた多様体を含むように拡張したものである。 [15] では 2 次元の open/closed TFT を詳しく扱っており、その一例として有限群  $\Gamma$  から構成した TQFT を拡張している。 [15] の例の TQFT の部分と、この小節の TQFT は一致しており、拡張部分同士も関係があると考えられる。 (実際、[15] における "category of boundary conditions" は、 $\mathcal{E}_{\rm pt}$  そのものと言ってよい。)

#### 7.2 d=3 の場合

d=3 の場合、群  $\Gamma$  の 3-コサイクル  $\omega$  から 3 次元  $\mathrm{TQFT}$  とその拡張が得られる。ここでは拡張部分の例をあげる。 $(\mathrm{TQFT}$  の部分は、例えば、[6,17] に詳しく記述されている。)

余次元 2 の多様体  $S^1$  には圏  $\mathscr{E}_{S^1}$  が対応した.  $S^1$  の任意の三角形分割 L に対して,  $\mathcal{E}_{(S^1,L)}$  は  $\mathcal{E}_{S^1}$  と同値な圏である. 三角形分割 L として, 図 2 のようなものをとる. すると,  $\mathcal{F}(L)$  上の  $\mathcal{G}(L)$ -同変な捻れベクトル束の圏と,  $\mathcal{F}(L)/\mathcal{G}'(L)$  上の  $\mathcal{G}(L)/\mathcal{G}'(L)$ -同変な捻れベクトル束の圏は同値な圏である. 後者の圏は, 前小節で用いた同一視  $\mathcal{F}(L)/\mathcal{G}'(L)\cong\Gamma$  のもとで,  $\Gamma$  上の  $\Gamma$  の共役作用で同変な捻れベクトル束の圏  $\mathcal{E}_{\Gamma}(\Gamma;c)$  と同一視できる. ただし, 2-コサイクル  $c\in Z^2(\Gamma;C(\Gamma,\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$  は次のように与えられる:

$$c(\gamma, \eta; \varphi) = \omega(\gamma, \eta, \varphi) - \omega(\gamma, \eta\varphi\eta^{-1}, \eta) + \omega(\gamma\eta\varphi\eta^{-1}\gamma^{-1}, \gamma, \eta).$$

2 次元多様体 Y に対応して、関手  $H_Y:\mathscr{E}_{S^1}\times\mathscr{E}_{S^1}\to\mathscr{E}_{S^1}$  が誘導される. Y の三角形分割 K として、図 3 のものをとる。 Push-forward と商をとる操作が可換であることより、前小節で用いた同一視のもとで、関手  $H_Y$  は次の関手に対応する.

$$r_{\text{out}!}r_{\text{in}}^*: \mathcal{E}_{\Gamma}(\Gamma;c) \times \mathcal{E}_{\Gamma}(\Gamma;c) \to \mathcal{E}_{\Gamma}(\Gamma;c).$$

ただし,  $r_{\rm in}$  と  $r_{\rm out}$  は次の通りである.

$$\Gamma \times \Gamma \xleftarrow{r_{\text{in}}} \mathcal{F}(K)/(\mathcal{G}'(L) \times \mathcal{G}'(L) \times \mathcal{G}'(L)) \xrightarrow{r_{\text{out}}} \Gamma$$

$$(g,h) \xleftarrow{} (g,h,k,a,b) \longmapsto k$$

さらに、push-forward 関手の定義に戻って考えると、関手  $r_{out}$ : $r_{in}^*$  は次の関手に自然同型であることがわかる:

$$\mu_! \iota^* : \mathcal{E}_{\Gamma}(\Gamma; c) \times \mathcal{E}_{\Gamma}(\Gamma; c) \to \mathcal{E}_{\Gamma}(\Gamma; c).$$

ここで、同変写像  $\iota$  と  $\mu$  は次の通りである.

$$(\Gamma \times \Gamma, \Gamma \times \Gamma) \xleftarrow{\iota} (\Gamma, \Gamma \times \Gamma) \xrightarrow{\mu} (\Gamma, \Gamma)$$
$$((\gamma, \gamma), (g, h)) \xleftarrow{\iota} (\gamma, (g, h)) \longmapsto (\gamma, gh)$$

2 次元多様体 Y から定まる上の関手  $\mathcal{E}_{\Gamma}(\Gamma;c) \times \mathcal{E}_{\Gamma}(\Gamma;c) \to \mathcal{E}_{\Gamma}(\Gamma;c)$  は、圏  $\mathcal{E}_{\Gamma}(\Gamma;c)$  にモノイド圏 (monoidal category), 或いは、テンソル圏 (tensor cateogory) の構造を与える。 さらに他の 2 次元多様体等を用いれば、圏  $\mathcal{E}_{\Gamma}(\Gamma;c)$  は、braided monoical category であって、balancing と duality を持つものになる ([7, 8]).

こういった性質をもつ圏の典型例は、ある種の準 Hopf 代数の表現のなす圏として実現される. (テンソル積表現をとる操作がモノイド圏の構造を与える.) 今の場合、圏  $\mathcal{E}_{\Gamma}(\Gamma;c)$  は Dijkgraaf-Pasquier-Roche の準 Hopf 代数の表現のなす圏と同値となる [7,8]. この対応は  $(E,\rho)\in\mathscr{E}_{\Gamma}(\Gamma;c)$  に対して、 $1\in\Gamma$  における E のファイバーを対応させることで得られる.

圏  $\mathscr{E}_{\Gamma}(\Gamma;c)$  の対象の同型類達がなす半群に Grothendieck 構成を施して得られる群を  $K_{\Gamma}(\Gamma;c)$  と書く. 上で述べた圏の同値関係を集合の同値関係に落とせば、準 Hopf 代数の表現のなすモノイド圏のフュージョン代数 (fusion ring) が、一種の同変 K 群である  $K_{\Gamma}(\Gamma;c)$  と同型になるという結論になる. 一方で、Freed-Hopkins-Teleman ([10]) により、一般のコンパクト Lie 群 G に対し、G のループ群の表現のなす Verlinde 代数 (フュージョン代数) が、G の同変捻れ K コホモロジー ([2]) と同型になる、という結果が得られている。この結果は、有限群  $\Gamma$  を考えたときに得られた Dijkgraaf-Pasquier-Roche の準 Hopf 代数のフュージョン代数と  $K_{\Gamma}(\Gamma;c)$  の関係を、コンパクト Lie 群の場合に一般化したものと見ることができる。彼らの証明 [10] に ETQFT はあらわれないが、彼らの結果を得るに到った背景に ETQFT があったことが [9] に述べられている。

# 参考文献

- [1] M. Atiyah, *Topological quantum field theories*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 68 (1988), 175–186 (1989).
- [2] M. Atiyah and G. Segal, Twisted K-theory, Ukr. Mat. Visn. 1 (2004), no. 3, 287–330; translation in Ukr. Math. Bull. 1 (2004), no. 3, 291–334
- [3] N. A. Baas, B. I. Dundas and J. Rognes, Two-vector bundles and forms of elliptic cohomology, Topology, geometry and quantum field theory, 18–45, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [4] J-L. Brylinski, Categories of vector bundles and Yang-Mills equations, Higher category theory (Evanston, IL, 1997), 83–98, Contemp. Math., 230, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [5] R. Dijkgraaf, V. Pasquier and P. Roche, *Quasi-quantum groups related to orbifold models*, Modern quantum field theory (Bombay, 1990), 375–383, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.
- [6] R. Dijkgraaf and E. Witten, Topological gauge theories and group cohomology, Comm. Math. Phys. 129 (1990), no. 2, 393–429.
- [7] D. S. Freed, Higher algebraic structures and quantization, Comm. Math. Phys. 159 (1994), no. 2, 343–398.
- [8] D. S. Freed, Quantum groups from path integrals. Particles and fields (Banff, AB, 1994), 63–107,CRM Ser. Math. Phys., Springer, New York, 1999.
- [9] D. S. Freed, The Verlinde algebra is twisted equivariant K-theory, Turkish J. Math. 25 (2001), no. 1, 159–167.
- [10] D. S. Freed, M. J. Hopkins and C. Teleman, Twisted K-theory and loop group representations, math/0312155.
- [11] M. M. Kapranov and V. A. Voevodsky, 2-categories and Zamolodchikov tetrahedra equations, Algebraic groups and their generalizations: quantum and infinite-dimensional methods (University Park, PA, 1991), 177–259, Proc. Sympos. Pure Math., 56, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [12] G. Karpilovsky, Projective representations of finite groups. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 94. Marcel Dekker, Inc., New York, 1985.
- [13] J. Kock, Frobenius algebras and 2D topological quantum field theories, London Mathematical Society Student Texts, 59. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [14] R. J. Lawrence, Triangulations, categories and extended topological field theories, Quantum topology, 191–208, Ser. Knots Everything, 3, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1993.
- [15] G. W. Moore and G. Segal, D-branes and K-theory in 2D topological field theory, hep-th/0609042.
- [16] J. R. Munkres, Elementary differential topology, Lectures given at Massachusetts Institute of Technology, Fall, 1961. Revised edition. Annals of Mathematics Studies, No. 54 Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1966.

- [17] M. Wakui, On Dijkgraaf-Witten invariant for 3-manifolds, Osaka J. Math. 29 (1992), no. 4, 675–696.
- [18] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, Comm. Math. Phys. 121 (1989), no. 3, 351–399.