Remarks on characteristic classes for twisted K-theory

五味 清紀

2011 年 5 月 29 日

話したいこと

Twisted K-theory に対する特性類についての「注意」:

- **普遍特性類環の基底と構造定数の記述**
- **Koschorke 類と Virasoro 加群の特異ベクトルの対応**

§1 Twisted K-theory
§2 特性類
§3 普遍特性類環の基底と構造定数の記述
§4 Koschorke 類と Virasoro 加群の特異ベクトル

§1 Twisted K-theory

- Twisted K-theory とは, 位相的 K 理論の変種の一つ.

$$\left.\begin{array}{l} X : \text{位相空間} \\ h \in H^3(X;\mathbb{Z}) : \text{twist} \end{array}\right\} \mapsto K(X;h)$$

- Donovan–Karoubi(1970) および Rosenberg(1989) が導入.
- 1990 年台後半から物理への応用等により注目を集める:

  D-brane charge, Verlinde 環, 量子 Hall 効果, ...

応用例：Verlinde 環

定理 (Freed–Hopkins–Telemann, arXiv:0711.1906)

Verlinde ring of $SU(n)$ at level k

$$\cong K_{SU(n)}^{\dim SU(n)}(SU(n); k+n).$$

$$\left(\begin{array}{l} SU(n) \text{ は } SU(n) \text{ に共役で作用.} \\ k+n \in H^3_{SU(n)}(SU(n);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}. \\ \text{積は } SU(n) \times SU(n) \to SU(n) \text{ の push-forward.} \end{array}\right)$$

応用例：Verlinde 環

定理 (Freed–Hopkins–Telemann, arXiv:0711.1906)

Verlinde ring of $SU(n)$ at level k

$$\cong K_{SU(n)}^{\dim SU(n)}(SU(n); k+n).$$

$$\left(\begin{array}{l} SU(n) \text{ は } SU(n) \text{ に共役で作用.} \\ k+n \in H^3_{SU(n)}(SU(n);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}. \\ \text{積は } SU(n)\times SU(n) \to SU(n) \text{ の push-forward.} \end{array}\right)$$

- 一般のコンパクト Lie 群 G についての主張がある.
- $G/T \times T \to G$ とアーベル化の関係? [Atiyah-Segal]

Twisted K-theory の定義

- $H^3(X;\mathbb{Z})$ の元を，主 $PU(\mathcal{H})$ 束 $P \to X$ で実現する.

$\mathcal{H}$: 無限次元可分 Hilbert 空間
$PU(\mathcal{H}) = U(\mathcal{H})/U(1)$: 射影ユニタリー群 ($\simeq K(\mathbb{Z},2)$)

- $PU(\mathcal{H})$ は Fredholm 作用素の空間 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ に共役で作用.

定義

$$K(X;P) = \Gamma(X, P \times_{Ad} \mathcal{F}(\mathcal{H}))/\text{ホモトピー}$$

- アーベル群の構造は $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \cong \mathcal{H}$ を使って定義.
- アーベル群としての同型類は $[P] \in H^3(X;\mathbb{Z})$ のみに依存.

例

$$H^3(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \ni [P] \neq 0$$

$\boxed{\text{X = 有向 3 次元閉多様体}}$

$$K(X;P) \cong H^2(X;\mathbb{Z}).$$

$\boxed{\text{X = SU(3)}}$

$$K(SU(3);P) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}, & (\ell = [P] : \text{奇数}) \\ \mathbb{Z}/\frac{\ell}{2}\mathbb{Z}. & (\ell = [P] : \text{偶数}) \end{cases}$$

§2 特性類 (Chern 類)

定義

Twisted K-theory の (偶数次数の) 特性類 $\Leftrightarrow$ 自然な写像:

$$c: \ K(X;P) \longrightarrow H^{\mathrm{even}}(X;\mathbb{C})$$

例: 指数 (仮想ランク)

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}: \ K(X;P) &\longrightarrow H^0(X;\mathbb{C}) \\ [(A_x)] &\mapsto [\mathrm{dimKer}A_x - \mathrm{dimCoker}A_x] \end{aligned}$$

事実: $[P] \in H^3(X;\mathbb{Z})$ **が torsion でない** $\Rightarrow$ $\mathrm{ind} \equiv 0.$
(指数 0 の連結成分 $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ だけが $K(X;P)$ に寄与する.)

§2 特性類 (Chern 類)

定義

Twisted K-theory の (偶数次数の) 特性類 $\Leftrightarrow$ 自然な写像:

$$c: \ K(X;P) \longrightarrow H^{\mathrm{even}}(X;\mathbb{C})$$

例: 指数 (仮想ランク)

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ind}: & K(X;P) & \longrightarrow & H^0(X;\mathbb{C}) \\ & [(A_x)] & \mapsto & [\mathrm{dimKer}A_x - \mathrm{dimCoker}A_x] \end{array}$$

事実: $[P] \in H^3(X;\mathbb{Z})$ **が torsion でない** $\Rightarrow$ $\mathrm{ind} \equiv 0$.
(指数 0 の連結成分 $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ **だけが** $K(X;P)$ **に寄与する.)**

$\cdots$ $[P]$ **が torsion かどうかで状況が異なることを示唆する.**

$[P] \in H^3(X;\mathbb{Z})$ 元が…

- torsion である: 普遍特性類のなす環は, 本質的に, 仮想ランクと "普遍 Chern 類" $c_1, c_2, \cdots$ によって生成される. (cf. Tomoda(2007))

- torsion でない: 普遍特性類のなす環は, 多項式環のある部分環になる (Atiyah-Segal(2006)):

$$J \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \ldots].$$

$[P] \in H^3(X;\mathbb{Z})$ 元が…

- torsion である: 普遍特性類のなす環は, 本質的に, 仮想ランクと "普遍 Chern 類" $c_1, c_2, \cdots$ によって生成される. (cf. Tomoda(2007))

- torsion でない: 普遍特性類のなす環は, 多項式環のある部分環になる (Atiyah-Segal(2006)):

$$J \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \ldots].$$

以下, $[P] \in H^3(X;\mathbb{Z})$ は torsion でないと仮定する.

部分環 J の定義

$$\begin{cases} A := \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \cdots] & \text{多項式環 } (\deg(x_i) = i) \\ d : \ A \to A & \text{微分 (derivation) :} \end{cases}$$

$$dx_1 = 0, \qquad dx_i = x_{i-1}, \ (i > 1).$$

定義 (Atiyah-Segal 不変多項式環)

$$J := \mathrm{Ker}(d)$$

部分環 J の定義

$$\begin{cases} A := \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \cdots] & \text{多項式環 } (\deg(x_i) = i) \\ d : \ A \to A & \text{微分 (derivation) :} \end{cases}$$

$$dx_1 = 0, \qquad dx_i = x_{i-1}, \ (i > 1).$$

$$0 \xleftarrow{d} x_1 \xleftarrow{d} x_2 \xleftarrow{d} x_3 \xleftarrow{d} x_4 \xleftarrow{d} x_5 \xleftarrow{d} \cdots$$

定義 (Atiyah-Segal 不変多項式環)

$$J := \mathrm{Ker}(d)$$

部分環 J の定義

$$\begin{cases} A := \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \cdots] & \text{多項式環 } (\deg(x_i) = i) \\ d : \ A \to A & \text{微分 (derivation) :} \end{cases}$$

$$dx_1 = 0, \qquad dx_i = x_{i-1}, \ (i > 1).$$

$$0 \xleftarrow{d} x_1 \xleftarrow{d} x_2 \xleftarrow{d} x_3 \xleftarrow{d} x_4 \xleftarrow{d} x_5 \xleftarrow{d} \cdots$$

定義 (Atiyah-Segal 不変多項式環)

$$J := \mathrm{Ker}(d)$$

例: $1, \ x_1, \ x_2^2 - 2x_1x_3.$

J の特徴付け: コホモロジー環

J の特徴付け (その 1)

$$J \cong H^{\mathrm{even}}(EPU(\mathcal{H}) \times_{Ad} \mathcal{F}_0; \mathbb{C})$$
$$\bigcap$$
$$A \cong H^{\mathrm{even}}(\mathcal{F}_0; \mathbb{C})$$

$$(x_i \mapsto \mathrm{ch}_{2i} \in H^{2i}(\mathcal{F}_0),\ \mathrm{ch} = \mathrm{ch}_2 + \mathrm{ch}_4 + \mathrm{ch}_6 + \cdots .)$$

$$\begin{tikzcd} EPU(\mathcal{H}) \times_{Ad} \mathcal{F}_0 \arrow[d] & \mathcal{F}_0 \arrow[l] \\ BPU(\mathcal{H}) & \end{tikzcd}$$

J の元から特性類をつくる

$$f \in J \cong H^{\mathrm{even}}(EPU(\mathcal{H}) \times_{Ad} \mathcal{F}_0; \mathbb{C})$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rccc} c_f : & K(X;P) & \longrightarrow & H^{\mathrm{even}}(X;\mathbb{C}) \\ & [A] & \mapsto & A^* \tilde{\phi}_P^* f \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} P \times_{Ad} \mathcal{F}_0 \arrow[r, "\tilde{\phi}_P"'] \arrow[d] & EPU(\mathcal{H}) \times_{Ad} \mathcal{F}_0 \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\phi_P"'] \arrow[u, bend left, "A"] & BPU(\mathcal{H}) \end{tikzcd}$$

J の特徴付け: 不変性

J の特徴付け (その 2)

$df(x_1, x_2, \cdots) = 0 \iff f \in A$ は以下の性質を持つ:

$$\begin{cases} {}^\forall E^i \to X & \text{ベクトル束 } (i = 0, 1),\ \mathrm{rk}E^0 = \mathrm{rk}E^1 \\ {}^\forall L \to X & \text{直線束} \end{cases}$$

$$f(x_1(E), x_2(E), \cdots) = f(x_1(L \otimes E), x_2(L \otimes E), \cdots)$$

$$\left(\mathrm{ch}(E^0) - \mathrm{ch}(E^1) = x_1(E) + x_2(E) + \cdots,\ x_n \in H^{2n}(X)\right)$$

J の特徴付け: 不変性

J の特徴付け (その 2)

$df(x_1, x_2, \cdots) = 0 \iff f \in A$ は以下の性質を持つ:

$$\begin{cases} {}^\forall E^i \to X & \text{ベクトル束 } (i = 0, 1),\ \mathrm{rk}E^0 = \mathrm{rk}E^1 \\ {}^\forall L \to X & \text{直線束} \end{cases}$$

$$f(x_1(E), x_2(E), \cdots) = f(x_1(L \otimes E), x_2(L \otimes E), \cdots)$$

$$\left(\mathrm{ch}(E^0) - \mathrm{ch}(E^1) = x_1(E) + x_2(E) + \cdots,\ x_n \in H^{2n}(X)\right)$$

ポイントは, 微分 d の以下のような幾何学的解釈:

“複素直線束をテンソル積する作用の,
コホモロジーのレベルにおける, 無限小生成子”

- $[P] \in H^3(X;\mathbb{Z})$ が non-torsion の場合，個々の特性類の役割や，J の環構造等について，わかっていることは少ない．
- 例えば，環 J の Poincaré 多項式はわかっている:

$$J = \bigoplus_n J_n,$$

$$\sum_n (\dim J_n) t^n = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)\cdots} + t.$$

- 上のことから，J は多項式環ではないが，それの生成元と関係式による (よい) 代数的表示はわかっていない．
[Atiyah–Segal]

- J について，少しだけわかったことを，報告したい．

§1 Twisted K-theory
§2 特性類
§3 普遍特性類環の基底と構造定数の記述
§4 Koschorke 類と Virasoro 加群の特異ベクトル

§3 普遍特性類環の基底と構造定数

目標: J を基底と構造定数によって表示すること.

- **基底の記述**
- **構造定数の記述**
- **結果の記述**

基底の記述

$n, \ell \geq 0$ が与えられたとき，次のように定める:

$$B_n^{(\ell)} = \left\{ (\beta_1, \cdots, \beta_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell \,\middle|\, \begin{array}{l} \beta_1, \cdots, \beta_{\ell-1} \geq 0,\ \beta_\ell \geq 1 \\ \beta_1 + 2\beta_2 + \cdots + \ell\beta_\ell = n \end{array} \right\}$$

($\Rightarrow B_n = \bigcup_\ell B_n^{(\ell)}$ は n の分割の集合)

定義 ("J の基底")

$B^{(\ell)} = \bigcup_n B_n^{(\ell)}$ の部分集合 $B^{(\ell)}(0)$ を次で定める:

$$B^{(0)}(0) = B_0^{(0)} = \{(\emptyset)\},$$
$$B^{(1)}(0) = B_1^{(1)} = \{(1)\},$$
$$B^{(\ell)}(0) = \{(0, \beta_2, \cdots, \beta_\ell) \in B^{(\ell)}\},\ (\ell \geq 2)$$

構造定数の記述

定義 (“構造定数”)

$\beta \in B^{(\ell)}$, $\beta' \in B^{(\ell')}$, $\beta'' \in B^{(\ell+\ell')}$ に対して, $N_{\beta\beta'}^{\beta''}$ を次の式によって定める:

$$e_1(\vec{k},\vec{k}')^{\beta''_1}\cdots e_{\ell+\ell'}(\vec{k},\vec{k}')^{\beta''_{\ell+\ell'}} = \sum_{\substack{\beta\in B^{(\ell)}\\ \beta'\in B^{(\ell')}}} N_{\beta\beta'}^{\beta''} e_1(\vec{k})^{\beta_1}\cdots e_\ell(\vec{k})^{\beta_\ell} e_1(\vec{k}')^{\beta'_1}\cdots e_{\ell'}(\vec{k}')^{\beta'_{\ell'}}.$$

ここで, $e_i(\vec{k})$, $e_i(\vec{k}')$, $e_i(\vec{k},\vec{k}')$ は, それぞれ

$$\{k_1,\cdots,k_\ell\},\ \{k'_1,\cdots,k'_{\ell'}\},\ \{k_1,\cdots,k_\ell,k'_1,\cdots,k'_{\ell'}\}$$

についての i 次初等対称多項式である.

結果の記述

命題 1(arXiv:1006.0638)

J は次のように定めた環と同型である:

- ベクトル空間として基底 $B(0) = \bigcup_{\ell \geq 0} B^{(\ell)}(0)$ を持つ.
- $\beta \in B^{(\ell)}(0)$ と $\beta' \in B^{(\ell')}(0)$ の積は次で定める.

$$\beta \cdot \beta' = \sum_{\beta'' \in B^{(\ell+\ell')}(0)} N_{\beta\beta'}^{\beta''} \beta''.$$

証明の説明

命題 1 の証明のポイント

$\beta \in B$ に対して，多項式 $g_\beta(\vec{x}) \in A$ を与えること．

証明すること:

1. $\{g_\beta(\vec{x}) | \ \beta \in B\}$ は A の基底を与える．
2. $g_\beta(\vec{x})$ 達の積についての構造定数が $N^{\beta''}_{\beta\beta'}$ になる．
3. $d : A \to A$ が $g_\beta(\vec{x})$ についてきれいな表示を持つ．

注意: $g_\beta(\vec{x})$ の定義は，twisted K-theory における Chern 指標と Adams 作用素に動機づけられている．

多項式 $g_\beta(\vec{x})$ の定義の準備

- 変数 $x_1, x_2, \cdots, k$ に対して，冪級数 $\mathrm{ch}(k|\vec{x})$ を次で定義:

$$\mathrm{ch}(k|\vec{x}) := \sum_{i\geq 1} k^i x_i = kx_1 + k^2x_2 + k^3x_3 + \cdots .$$

- 同様に，$x_1, x_2, \cdots, k_1, \cdots, k_\ell$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(k_1, \cdots, k_\ell|\vec{x}) &:= \mathrm{ch}(k_1|\vec{x}) \cdots \mathrm{ch}(k_\ell|\vec{x}) \\ &= \sum_{i_1,\cdots,i_\ell\geq 1} k_1^{i_1} \cdots k_\ell^{i_\ell} x_{i_1} \cdots x_{i_\ell}\end{aligned}$$

多項式 $g_\beta(\vec{x})$ の定義

- x_i 達について次数 n の部分

$$\mathrm{ch}(k_1,\cdots,k_\ell|\vec{x})_n = \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_\ell\geq 1\\ i_1+\cdots+i_\ell=n}} k_1^{i_1}\cdots k_\ell^{i_\ell} x_{i_1}\cdots x_{i_\ell}$$

は k_j 達についての n 次対称多項式である. $(\deg k_j = 1)$

定義

$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_\ell)\in B_n^{(\ell)}$ に対し, $g_\beta(\vec{x})\in A$ を次で定める:

$$\mathrm{ch}(k_1,\cdots,k_\ell|\vec{x})_n = \sum_{\beta\in B_n^{(\ell)}} e_1(\vec{k})^{\beta_1}\cdots e_\ell(\vec{k})^{\beta_\ell} g_\beta(\vec{x}).$$

証明すること: その 1

補題 1

$\{g_\beta(\vec{x}) \mid \beta \in B_n^{(\ell)}\}$ は, 次のベクトル空間の基底である:

$$A_n^{(\ell)} = \mathrm{Span}\left\{ x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_\ell} \,\middle|\, \begin{array}{l} \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_\ell \geq 1 \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell = n \end{array} \right\}$$

証明すること: その 1

補題 1

$\{g_\beta(\vec{x}) \mid \beta \in B_n^{(\ell)}\}$ は, 次のベクトル空間の基底である:

$$A_n^{(\ell)} = \mathrm{Span}\left\{ x_{\lambda_1} \cdots x_{\lambda_\ell} \,\middle|\, \begin{array}{l} \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_\ell \geq 1 \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell = n \end{array} \right\}$$

$\because$) 分割 $\lambda \in \Lambda_n^{(\ell)}$ に対応する, monomial symmetric polynomial $m_\lambda(\vec{k})$ を使うと次のように書ける:

$$\mathrm{ch}(k_1, \cdots, k_\ell | \vec{x})_n = \sum_{\lambda \in \Lambda_n^{(\ell)}} m_\lambda(\vec{k}) x_\lambda = \sum_{\beta \in B_n^{(\ell)}} e(\vec{k})^\beta g_\beta(\vec{x}).$$

$m_\lambda(\vec{k}) = \sum_\beta M_{\lambda\beta} e(\vec{k})^\beta$ によって定義した可逆行列 $(M_{\lambda\beta})$ を使うと, $g_\beta(\vec{x}) = \sum_\lambda M_{\lambda\beta} x_\lambda$ と書ける. $\square$

証明すること: その 2 とその 3

補題 2

A の $\{g_\beta(\vec{x}) |\ \beta \in B\}$ についての構造定数は $N^{\beta''}_{\beta\beta'}$ である.

$$\mathrm{ch}(k_1, \cdots, k_\ell | \vec{x})\mathrm{ch}(k'_1, \cdots, k'_{\ell'} | \vec{x}) = \mathrm{ch}(k_1, \cdots, k_\ell, k'_1, \cdots, k'_{\ell'} | \vec{x})$$

補題 3

$$\{g_\beta(\vec{x}) |\ \beta \in B(0)\} = J \cap \{g_\beta(\vec{x}) |\ \beta \in B\}.$$

$$d\mathrm{ch}(k_1, \cdots, k_\ell | \vec{x}) = e_1(k_1, \cdots, k_\ell)\mathrm{ch}(k_1, \cdots, k_\ell | \vec{x})$$

$$\Rightarrow\ dg_{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\ell)}(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & (\beta_1 = 0) \\ g_{(\beta_1 - 1, \beta_2, \cdots, \beta_\ell)}(\vec{x}). & (\beta_1 \geq 1) \end{cases}$$

基底を使った応用

- Atiyah–Segal の問題についての解答の一つが得られる.
  (特性類の “ねじれコホモロジー” への持ち上げと基底の構成)
- J の生成元と関係式による自明な表示

§4 Koschorke 類と Virasoro 加群の特異ベクトル

- Koschorke (1968) は次のようなコホモロジー類を考えた:

$$\mathcal{F}_{r,s} := \left\{ A \in \mathcal{F}_{r-s} \middle| \begin{array}{rcl} \mathrm{dim}\mathrm{Ker}A & = & r \\ \mathrm{dim}\mathrm{Coker}A & = & s \end{array} \right\},$$

$$k_{r,s} := \text{“}\mathrm{PD}(\mathcal{F}_{r,s})\text{”} \in H^{2rs}(\mathcal{F}_{r-s})$$

§4 Koschorke 類と Virasoro 加群の特異ベクトル

- Koschorke (1968) は次のようなコホモロジー類を考えた:

$$\mathcal{F}_{r,s} := \left\{ A \in \mathcal{F}_{r-s} \middle| \begin{array}{rcl} \mathrm{dimKer}A & = & r \\ \mathrm{dimCoker}A & = & s \end{array} \right\},$$

$$k_{r,s} := \text{“}\mathrm{PD}(\mathcal{F}_{r,s})\text{”} \in H^{2rs}(\mathcal{F}_{r-s})$$

- 幾何的な構成から, $k_{r,r} \in H^*(\mathcal{F}_0) \cong A$ は J に属する. (Atiyha–Segal に従ってこれを Koschorke 類と呼ぶ.)

$$k_{1,1} = c_1 = x_1,$$

$$k_{2,2} = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = x_2^2 - 2x_1x_3 + \frac{1}{12}x_1^4.$$

Atiyah–Segal のコメント (2006)

- Atiyah–Segal (2006) は, 以下の意味のコメントをしている:

  $k_{r,r}$ は, d を含む, "無限次元の群" の作用で不変である.

- "無限次元の群" とは何か?

Atiyah–Segal のコメント (2006)

- Atiyah–Segal (2006) は, 以下の意味のコメントをしている:

  $k_{r,r}$ は, d を含む, "無限次元の群" の作用で不変である.

- "無限次元の群" とは何か?

- 一つの解釈: Virasoro 代数 (あるいは Bott-Virasoro 群)

Atiyah–Segal のコメント (2006)

- Atiyah–Segal (2006) は, 以下の意味のコメントをしている:

  $k_{r,r}$ は, d を含む, "無限次元の群" の作用で不変である.

- "無限次元の群" とは何か?

- 一つの解釈: Virasoro 代数 (あるいは Bott-Virasoro 群)

  根拠となるのは次の命題:

Koschorke 類と特異ベクトルの対応

命題 2

A 上の線形写像 $\{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が存在して以下を満たす:

1. $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}$
2. $L_1 = -d$,
3. この Virasoro 代数の表現の特異ベクトル ($\{L_n\}_{n>0}$ で消される元) は, $k_{r,r} \in A$, $(r = 0, 1, \ldots,)$ に対応する.

Koschorke 類と特異ベクトルの対応

命題 2

A 上の線形写像 $\{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が存在して以下を満たす:

1. $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}$
2. $L_1 = -d$,
3. この Virasoro 代数の表現の特異ベクトル ($\{L_n\}_{n>0}$ で消される元) は, $k_{r,r} \in A$, $(r = 0, 1, \ldots,)$ に対応する.

$\because$) A には Heisenberg 代数を作用させることができる:

$$[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}.$$

すると, Virasoro 代数も作用させることができる.
後は, Mimachi-Yamada の結果 (1989) を使えばよい. $\square$

- **状況をまとめると次のとおり:**

$$\begin{aligned} H^*(\mathcal{F}_0) &\cong \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots] \curvearrowleft a_n, L_n \\ k_{r,r} &\leftrightarrow \text{singular vector} \end{aligned}$$

- 状況をまとめると次のとおり:

$$\begin{aligned} H^*(\mathcal{F}_0) &\cong \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots] \curvearrowleft a_n, L_n \\ k_{r,r} &\leftrightarrow \text{singular vector} \end{aligned}$$

この対応は, 現時点では, 表面的なものに留まる.

- 状況をまとめると次のとおり:

$$\begin{array}{rcl} H^*(\mathcal{F}_0) & \cong & \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots] \curvearrowleft a_n, L_n \\ k_{r,r} & \leftrightarrow & \text{singular vector} \end{array}$$

  この対応は, 現時点では, 表面的なものに留まる.

- $L_1 = -d$ には, “直線束をテンソル積する作用の無限小生成子” という幾何学的な意味・実現があった.

- 状況をまとめると次のとおり:

$$\begin{array}{rcl} H^*(\mathcal{F}_0) & \cong & \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots] \curvearrowleft a_n, L_n \\ k_{r,r} & \leftrightarrow & \text{singular vector} \end{array}$$

  この対応は, 現時点では, 表面的なものに留まる.

- $L_1 = -d$ には, “直線束をテンソル積する作用の無限小生成子” という幾何学的な意味・実現があった.

問題

a_n や L_n の $H^*(\mathcal{F}_0)$ への作用を幾何学的に実現できるか?

- 状況をまとめると次のとおり:

$$\begin{array}{rcl} H^*(\mathcal{F}_0) & \cong & \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots] \curvearrowleft a_n, L_n \\ k_{r,r} & \leftrightarrow & \text{singular vector} \end{array}$$

  この対応は, 現時点では, 表面的なものに留まる.

- $L_1 = -d$ には, “直線束をテンソル積する作用の無限小生成子” という幾何学的な意味・実現があった.

問題

a_n や L_n の $H^*(\mathcal{F}_0)$ への作用を幾何学的に実現できるか?

cf. 曲面上の点の Hilbert スキーム (中島)

派生する問題

$$\begin{aligned} H^*(\mathcal{F}_0) &\cong \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots] \curvearrowleft a_n, L_n, L_1 = -d \\ k_{r,r} &\leftrightarrow \text{singular vector} \end{aligned}$$

- 既約分解に幾何学的意味はあるのか?

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots] = \bigoplus_{r \geq 0} L(1, r^2)$$

$$\mathcal{F}_0 = \bigcup_{r \geq 0} \mathcal{F}_{r,r}$$

cf. $$H^i(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_{\leq r-1, \leq r-1}) = \begin{cases} 0, & (i < 2r^2) \\ \mathbb{C}k_{r,r}. & (i = 2r^2) \end{cases}$$

- コホモロジー作用素との関係はあるのか?
  (MU^* 上: 桂–清水–上野, Morava)
- $J \cap L(1, r^2)$ の基底を記述することはできるのか?