幾何学演習（2011 年 4 月 11 日）

担当：境 圭一

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ などは，すべて $\mathbb{R}^3$ のベクトルとする．

1. ベクトル積では一般に $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ であることを，例として

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

について計算し確かめよ．

2. 次の等式を証明せよ．

(1) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}$

(2) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$

(3) $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$

(4) $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ のなす角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とするとき，$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$

3. (1) 一次独立な二つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ を辺とする平行四辺形の面積は

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$$

であることを証明せよ．

(2) 一次独立な三つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ を辺とする平行六面体の体積は

$$|\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle|$$

であることを証明せよ．

4. 講義で省略した補題 1.2 の証明を完成させよ．

（ヒント）

2. (1) は座標を使って両辺を計算する．(2) は (1) を使う．(3) は次の式を使う：

$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \times \mathbf{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{c} \times \mathbf{d} & \mathbf{a} \end{vmatrix} = \langle \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}), \mathbf{a} \rangle$$

（補題 1.2 (e) の証明中の式を二回使った）．これと (1) を組み合わせる．(4) は (3) で $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \mathbf{u}$, $\mathbf{b} = \mathbf{d} = \mathbf{v}$ とおく．$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2}{|\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2}$.

3. (1) 前問 (4) を使う．(2) では $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u}, \mathbf{v}$ であることと (1) を使う．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/11_geometry/11_geometry.html