幾何学演習（2011 年 4 月 18 日）

担当：境 圭一

1. 関数 $f(x) = x|x|$ は C^1 級だが C^2 級ではないことを確かめよ．

2. (1) 次の曲線について，速度ベクトル場を求めよ．

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \beta(t) = \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t - e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ t^3 - 3t + 1 \\ t^4 - t^3 - t \end{pmatrix}$$

   (2) (1) のうち，正則曲線であるものはどれか．その曲線について，接ベクトル場 $\mathbf{T}(t)$ を求めよ．

3. $\mathbb{R}^2$ 上の曲線 $\alpha(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ について，二つのベクトル $\alpha(t)$ と $\alpha'(t)$ のなす角 θ は t によらない一定値であることを証明し，その値を求めよ．

4. 正則曲線 $\alpha : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ について，$\alpha(t)$ と $\alpha'(t)$ が常に直交し，$|\alpha(0)| = 1$ とする．このとき，$\alpha(t)$ は常に（t によらずに）原点を中心とする半径 1 の球面の上にあることを証明せよ．

5. 次の曲線について速度ベクトル場を求め，正則曲線であることを確かめよ．また，曲線の長さを求めよ．ただし $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ は t によらないベクトルで $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ とする．

$$(1)\quad \alpha(t) = \mathbf{u} + t\mathbf{v} \quad (0 \leq t \leq 1) \qquad (2)\quad \beta(t) = \begin{pmatrix} 4t^{3/2}/3 \\ t^2/2 \\ 2t \end{pmatrix} \quad (1 \leq t \leq 2)$$

（ヒント）

1. $f''(0)$ が存在しないことをいえばよい．

2. (1) 各成分ごとに微分すればよい．(2) 常に速度ベクトル $\neq \mathbf{0}$ の曲線を探す．

3. $\cos\theta = \dfrac{\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle}{|\alpha(t)||\alpha'(t)|}$.

4. $|\alpha(t)|^2 = \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle$ を t について微分するとよい（成分を使って計算できる）．

5. (1) α の長さは $\displaystyle\int_0^1 |\alpha'(t)|\, dt$. (2) も同様.