# 幾何学演習（2011 年 4 月 25 日）

担当：境 圭一

1. $|\alpha'(t)| = 1$ である曲線 $\alpha$ について，
$$\mathbf{T}(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}, \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\kappa(t)} \left( = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \right), \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$
は $\mathbb{R}^3$ の正規直交系をなす（つまり，いずれも長さ 1 で，互いに直交する）ことを示せ（次回の講義でやります）．

2. 次の曲線はいずれも $|\alpha'(t)| = 1$ であることを確かめ，Frenet-Serret 装置 $\{\kappa(t), \tau(t), \mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)\}$ を求めよ．ただし (2) では $|t| < 1$ とする．
$$(1)\ \alpha(t) = \begin{pmatrix} \frac{5}{13}\cos t \\ 1 - \sin t \\ -\frac{12}{13}\cos t \end{pmatrix}, \quad (2)\ \alpha(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1+t)^{3/2} \\ \frac{1}{3}(1-t)^{3/2} \\ t/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (3)\ \alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+t^2} \\ 2t \\ \log(t + \sqrt{1+t^2}) \end{pmatrix}$$

3. (1) 正則曲線 $\alpha(t) = (e^t \cos t,\, e^t \sin t,\, e^t)$ について，次の手順に従い，速度ベクトルの長さが常に 1 となるようにパラメータ変換せよ．
   - (i) 速度ベクトル場 $\alpha'(t)$, その長さ $|\alpha'(t)|$ を求めよ．
   - (ii) 長さ関数 $l(t) = \displaystyle\int_0^t |\alpha'(t)|dt$ を計算せよ．
   - (iii) $s = l(t)$ の逆関数 $t = g(s)$ を求めよ．
   - (iv) $\beta(s) = \alpha(g(s))$ とおき，$|\beta'(s)| = 1$ であることを確認せよ．

   (2) 上で求めた曲線 $\beta(s)$ について，Frenet-Serret 装置を求めよ．

4. 次の曲線について，前問 1. と同様にパラメータ変換し，Frenet-Serret 装置を求めよ．
$$(1)\ \alpha(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}, \quad (2)\ \alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ t \end{pmatrix}, \quad (3)\ \alpha(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos^{-1} t - t\sqrt{1-t^2} \\ 1 - t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
ただし $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, また (3) では $|t| < 1$, $0 < \cos^{-1} t < \pi$ とする．

（ヒント）

1. $|\mathbf{T}(t)| = 1$（定数）だから $(|\mathbf{T}(t)|^2)' = 0 = 2\langle \mathbf{T}(t), \mathbf{T}'(t) \rangle$．補題 1.2 (e) と，4/11 の演習 2. (4) も使う．

3. (iii) $t = g(s) \Leftrightarrow s = l(t)$.

4. (2) $y = \sinh x$ の逆関数は，$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$ を解いて求められる．
   (3) $(\cos^{-1} t)' = -1/\sqrt{1-t^2}$.

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/11_geometry/11_geometry.html