幾何学演習（2011 年 4 月 25 日）略解

担当：境 圭一

2. Frenet-Serret 装置 $\{\kappa(t), \tau(t), \mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)\}$ は以下の通り：

(1) $\left\{1, 0, \begin{pmatrix} -\frac{5}{13}\sin t \\ -\cos t \\ \frac{12}{13}\sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{5}{13}\cos t \\ \sin t \\ \frac{12}{13}\cos t \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ 0 \\ \frac{5}{13} \end{pmatrix}\right\}$

(2) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1-t^2}}, \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1-t^2}}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{1+t} \\ -\sqrt{1-t} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{1-t} \\ \sqrt{1+t} \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{1+t} \\ \sqrt{1-t} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$

(3) $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}(1+t^2)}, \frac{2}{\sqrt{5}(1+t^2)}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} \\ 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{1+t^2}} \end{pmatrix}\right\}$

3. (1) (i) $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t(\cos t + \sin t) \\ e^t \end{pmatrix}$, $|\alpha'(t)| = \sqrt{3}e^t$.

(ii) $l(t) = \sqrt{3}(e^t - 1)$.

(iii) $g(s) = \log(1 + s/\sqrt{3})$.

(iv) スペースの省略のため，$p(s) = 1 + s/\sqrt{3}$ と書くことにする．

$$\beta(s) = p(s)\begin{pmatrix} \cos\log p(s) \\ \sin\log p(s) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta'(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \cos\log p(s) - \sin\log p(s) \\ \cos\log p(s) + \sin\log p(s) \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり，$|\beta'(s)| = 1$ がわかる．Frenet-Serret 装置は

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{3p(s)}, \frac{1}{3p(s)}, \beta'(s), \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\cos\log p(s) - \sin\log p(s) \\ \cos\log p(s) - \sin\log p(s) \\ 0 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\cos\log p(s) + \sin\log p(s) \\ -\cos\log p(s) - \sin\log p(s) \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

4. 長さ関数 $l(t)$ はそれぞれ

$$(1)\ \sqrt{r^2+h^2}\,t, \quad (2)\ \sinh t, \quad (3)\ t$$

であり，逆関数 $t = g(s)$ はそれぞれ

$$(1)\ \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, \quad (2)\ \log(s + \sqrt{1+s^2}), \quad (3)\ s$$

となる．これらで $\alpha(t)$ をパラメータ変換して得られる $\beta(s)$ は

$$(1)\ \begin{pmatrix} r\cos\omega s \\ r\sin\omega s \\ h\omega s \end{pmatrix}, \quad (2)\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{1+s^2} \\ s \\ \log(s+\sqrt{1+s^2}) \end{pmatrix}$$

である．ただし $\omega = 1/\sqrt{r^2+h^2}$. (3) はパラメータ変換の必要がない．
Frenet-Serret 装置は以下の通り：

$$(1)\ \left\{ r\omega^2, h\omega^2, \omega\begin{pmatrix} -r\sin\omega s \\ r\cos\omega s \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos\omega s \\ -\sin\omega s \\ 0 \end{pmatrix}, \omega\begin{pmatrix} h\sin\omega s \\ -h\cos\omega s \\ r \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2)\ \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}(1+s^2)}, \frac{1}{\sqrt{2}(1+s^2)}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \\ 0 \\ -\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \end{pmatrix} \right\}$$

$$(3)\ \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}, 0, \begin{pmatrix} -\sqrt{1-s^2} \\ -s \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s \\ -\sqrt{1-s^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$